A feladat feltételeinek két kör is megfelelhet. Az egyiket az *ábrán* láthatjuk. A másik az lesz, amelyik a nagyobb körrel és az érintővel közrefogja a kisebb kört. Legyen az adott körök középpontja O_1 és O_2, a sugaruk R és r. A szerkesztendő kör középpontja O, sugara x. Az érintési pontok legyenek E_1, E, E_2. Húzzunk párhuzamost E_2-n át O_1O_2-vel. A Pitagorasz-tétel szerint

$$E_1E_2^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = R \cdot r,$$

tehát $E_1E_2 = 2\sqrt{R \cdot r}$. Hasonlóan $E_1E = 2\sqrt{R \cdot x}$, $EE_2 = 2\sqrt{r \cdot x}$. Mivel $E_1E_2 = E_1E + EE_2$, azért

(1) $$2\sqrt{R \cdot r} = 2\sqrt{R \cdot x} + 2\sqrt{r \cdot x},$$

amiből

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{R \cdot r}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}, \qquad \text{azaz} \qquad x = \frac{R \cdot r}{R + 2\sqrt{Rr} + r}.$$

Ezt úgy szerkeszthetjük meg, hogy megszerkesztjük $\sqrt{Rr}$-t, majd a nevezőt, végül x-et az R és r, valamint a nevezőhöz tartozó negyedik arányosként kapjuk.

A másik megoldást az ábra alapján úgy képzelhetjük el, mintha az O_2 és O középpontú kör lenne adott, és az O_1 középpontú kört kellene megszerkeszteni. Ha most az O_1 középpontú kör sugarát R helyett x-szel jelöljük, és a másik két sugár lesz R, illetve r, akkor (1) így alakul: $\sqrt{x \cdot R} = \sqrt{x \cdot r} + \sqrt{R \cdot r}$, és $x = \dfrac{R \cdot r}{\left(\sqrt{R} - \sqrt{r}\right)^2}$. A szerkesztés hasonlóan végezhető, mint az első esetben. Azt is láthatjuk, hogy az első eset szerinti megoldás mindig létezik, a másik pontosan akkor, ha $R \neq r$. Ezért a feladatnak egy megoldása van, ha $R = r$, egyébként pedig kettő.

Farkas Péter (Budapest, Szent László Gimn., III. o. t) és
Németh Ákos (Fazekas M. Főv. Gyak, Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A fenti számításokat Farkas Péter igen elegánsan végezte el annak ismeretében, hogy ha négy kör kölcsönösen érinti egymást, akkor a görbületeik négyzetösszegének kétszerese megegyezik a görbületek összegének négyzetével. Ezt a tételt Descartes fedezte fel, alkalmazása szempontjából a körök között egyenesek is szerepelhetnek zérus görbülettel. Egy r sugarú kör görbülete a körvonal minden pontjában $\dfrac{1}{r}$. A feladatunk általánosítását jelentő problémát, amely az idézett tétel bizonyításához vezet, érdeklődő olvasóink megtalálhatják H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai c. művének 31–32. oldalán.

2. Németh Ákos inverzióval is megoldotta a feladatot. Az inverzió középpontjául a két kör érintési pontját választotta. Így a két adott kör inverze két párhuzamos egyenes lesz, és a keresett kör(ök) inverzét a két párhuzamos egyenest és a közös érintő inverzkörét érintő kör adja.

Az inverzióról H. S. M. Coxeter–S. L. Greitzer: Az újra felfedezett geometria c. mű 175–204. oldalán olvashatnak megoldóink.

3. Feladatunk speciális esete az Apollóniosz-féle feladatnak, amely legáltalánosabban így fogalmazható meg: Három adott körhöz szerkesztendők azok a körök, amelyek az adott körök mindegyikét érintik (a körök között – elfajuló esetként – egyeneseket is megengedve).