Szorozzuk meg a jobb oldalt $abc=1$-gyel, és rendezzünk minden tagot a bal oldalra (az egyenlőtlenség továbbra is fennmarad):

$$a+b+c>bc+ac+ab,$$

$$a+b+c-ab-bc-ca>0.$$

Adjunk a bal oldalhoz $abc-1=0$-t, akkor szorzattá lehet alakítani:

$$abc-ab-bc-ca+a+b+c>0,$$
$$(a-1)(b-1)(c-1)>0.$$

Ez akkor teljesül, ha mindhárom tényező pozitív, vagy pedig egyikük pozitív, a másik kettő negatív. Ha azonban mindhárom tényező pozitív lenne, akkor $a>1, b>1, c>1$, ami ellentmond az $abc=1$ feltételnek. A három tényező közül tehát pontosan az egyik pozitív, ami azt jelenti, hogy a, b és c közül pontosan az egyik nagyobb 1-nél.

Marx Dániel (Budapest, Szent István Gimn. III.o.t.)

Megjegyzés. Talán kicsit váratlannak tűnik a megoldásban alkalmazott ötlet. Az (1) egyenlőtlenséghez más gondolatmenettel is eljuthatunk.

Mivel a-t, b-t és c-t 1-gyel akarjuk összehasonlítani, legyen $a=1+x, b=1+y, c=1+z$. Azt kell bebizonyítani, hogy ha $(1+x)(1+y)(1+z)=1$, azaz $x+y+z+xy+xz+yz+xyz=0$, és

$$3+x+y+z>\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}, \tag{1}$$

akkor, x, y és z közül pontosan az egyik pozitív. Ha (2)-t a megoldásban látott módon átrendezzük, akkor

$$0>x+y+z+xy+xz+yz,$$

vagyis, az

$$xyz>0$$

egyenlőtlenséget kapjuk.