

Legyen a sorozat első eleme a_1 , hányadosa q . A mértani sorozat összegképlete szerint tetszőleges n pozitív egészre:

$$S_n = \begin{cases} na_1, & \text{ha } q = 1; \\ a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{ha } q \neq 1. \end{cases}$$

Ha $q = 1$, akkor az állítás a következő:

Ha

$$(1) \quad 200a_1 + 1 = (100a_1 + 1)^2,$$

akkor

$$(2) \quad 600a_1 + 1 = (300a_1 + 1)^2.$$

A négyzetreemeléseket elvégezve látható, hogy (1) és (2) egyaránt az $a_1 = 0$ összefüggéssel ekvivalens.

Ha $q \neq 1$, akkor az állítás a következő alakban írható fel:

Ha

$$(3) \quad a_1 \frac{q^{200} - 1}{q - 1} + 1 = \left(a_1 \frac{q^{100} - 1}{q - 1} + 1 \right)^2,$$

akkor

$$(4) \quad a_1 \frac{q^{600} - 1}{q - 1} + 1 = \left(a_1 \frac{q^{300} - 1}{q - 1} + 1 \right)^2.$$

Legyen $h = \frac{a_1}{q - 1}$. Ezt behelyettesítve (3)-ba és rendezve:

$$\begin{aligned} h(q^{200} - 1) + 1 &= (h(q^{100} - 1) + 1)^2 \\ h(q^{100} - 1)(q^{100} + 1) + 1 &= h^2(q^{100} - 1)^2 + 2h(q^{100} - 1) + 1 \\ h(q^{100} - 1)(h(q^{100} - 1) + 2 - (q^{100} + 1)) &= 0 \end{aligned}$$

$$(3') \quad h(h - 1)(q^{100} - 1)^2 = 0.$$

Mivel ezek ekvivalens átalakítások, (3) és (3') ekvivalensek. Ha ugyanezeket elvégezzük (4)-gyel is, a következőt kapjuk:

$$(4') \quad h(h - 1)(q^{300} - 1)^2 = 0.$$

Ebből azonban kiemelhető (3'):

$$(5) \quad h(h - 1)(q^{100} - 1)^2 (q^{200} + q^{100} + 1)^2 = 0.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések.

1. Az állítás megfordítása is igaz (legalábbis a valós számok körében), mert $q^{200} + q^{100} + 1$ mindig pozitív.

2. A számítások kicsit egyszerűbben is elvégezhetők, ha S_{200} -at, S_{300} -at és S_{600} -at q^{100} és S_{100} segítségével fejezzük ki. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} S_{200} &= (1 + q^{100}) S_{100}, \\ S_{300} &= (1 + q^{100} + q^{200}) S_{100}, \end{aligned}$$

és

$$S_{600} = (1 + q^{100} + \dots + q^{500}) S_{100}.$$

Ezek után a feltétel a következőképpen alakítható át:

$$(1 + q^{100}) S_{100} + 1 = (S_{100} + 1)^2, \\ S_{100} (S_{100} - q^{100} + 1) = 0.$$

Ebből

$$S_{100} = 0 \quad \text{vagy} \quad S_{100} = q^{100} - 1.$$

Ha $S_{100} = 0$, akkor $S_{300} = S_{600} = 0$ és az állítás teljesül. Ha $S_{100} = q^{100} - 1$, akkor $S_{300} = q^{300} - 1$ és $S_{600} = q^{600} - 1$, amit behelyettesítve könnyen ellenőrizhető az állítás.

3. Az $S_{200} + 1 = (S_{100} + 1)^2$ feltétel a következő esetekben teljesül (ezt a megoldásból lehet kiolvasni):

- a) A sorozat minden eleme 0;
- b) $a_1 = q - 1$;
- c) $q = -1$.