

Először megmutatjuk, hogy egy téglalapba írt háromszög területe legfeljebb a téglalap területének a fele. Az *1. ábrán* az  $A$  pontból merőlegest húzunk a téglalap  $a$  oldalára. Ennek a merőlegesnek a két partján keletkezett akármelyik részháromszög területe legfeljebb akkora, mint az őt tartalmazó résztéglalap területének a fele, ezért  $T_{ABC} \geq \frac{a \cdot b}{2}$ . Ha az  $A, B, C$  pontok közül legalább egy a téglalap belsejében van, akkor

$$(1) \quad T_{ABC} < \frac{a \cdot b}{2}.$$

1. ábra      2. ábra      3. ábra

Osszuk fel ezután az egységnégyzetet egyik szemközti oldalpárjával párhuzamos egyenesekkel négy  $\frac{1}{4}$  szélességű téglalagra (*2. ábra*). Mivel a négyzet belsejében 9 pont van, legalább az egyik oszlopban legalább 3 pont lesz. E három pont egyike sem eshet a téglalap  $\frac{1}{4}$  hosszúságú oldalára, ezért a három pont olyan háromszöget alkot, amelynek területe (1) alapján  $\frac{1}{8}$ -nál kisebb. Ha az elmondott felosztást a másik oldalpárral párhuzamos egyenesekkel végezzük – a négyzetet így „sorokra” bontjuk – újra találhatunk egy olyan háromszöget, amelynek területe  $\frac{1}{8}$ -nál kisebb. Ha az újabb háromszög nem azonos az előzővel, akkor a bizonyítással készen vagyunk.

Hátra van még az az eset, amikor a kétféle felosztással ugyanazt a ponthármast választjuk ki. A *3. ábra* ilyen esetet tüntet fel. Bebizonyítjuk, hogy ekkor bármely további  $D$  pont az  $A, B, C$  közül valamelyik kettővel  $\frac{1}{8}$ -nál kisebb területű háromszöget alkot. Feltehető, hogy pl.  $DC$  a  $DA$  és  $DB$  félegyenesek meghatározta szögtartományban van (valamelyikkel egybe is eshet). Az  $ABCD$  négyszög területét a következőképpen becsüljük:

$$AB < \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ és } DC < \sqrt{2},$$

ezért  $T_{ABCD} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{4}$ . De akkor a  $DAC$  vagy  $DBC$  háromszögek valamelyikének a területe kisebb lesz  $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$ -nál. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.



