

I. megoldás. Jelöljük a szakaszokat a_i -vel ($i = 1, 2, \dots, 5$). Feltehetjük, hogy

$$(1) \quad 0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5.$$

Az állítást indirekt úton bizonyítjuk, tehát az öt szakasz közül bármelyik háromból szerkeszthető háromszög vagy derékszögű, vagy tompaszögű. A koszinusztételből könnyen adódik, hogy ekkor

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &\leq a_3^2, \\ a_2^2 + a_3^2 &\leq a_4^2, \\ a_3^2 + a_4^2 &\leq a_5^2. \end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenségből $a_5 < a_1 + a_2$, azaz

$$a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2.$$

Ezt a négy egyenlőtlenséget összeadva

$$a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + 2a_1a_2,$$

amiből

$$a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2.$$

Mivel $a_2 \leq a_3$, azért $2a_2^2 < 2a_1a_2$ és így $a_2 < a_1$. Ez ellentmondás, tehát igaz a feladat állítása.

II. megoldás. Az (1) feltevést most is használjuk. Ha az a_1, a_2, a_3 szakaszokból szerkeszthető háromszög hegyesszögű, akkor az állítás igaz. Tegyük fel ezután, hogy ez a háromszög nem hegyesszögű. Ekkor az a_1, a_2, a_4 és az a_1, a_2, a_5 szakaszokból szerkeszthető háromszögek sem hegyesszögűek, és az említett 3 háromszögben az a_3, a_4, a_5 oldalakkal szemközti szögeket rendre α, β, γ -val jelölve

$$(2) \quad 90^\circ \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma < 180^\circ.$$

A koszinusztétel szerint

$$\begin{aligned} a_3^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cdot \cos \alpha, \\ a_4^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cdot \cos \beta, \\ a_5^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

Az első két egyenlet összegéből a harmadikat kivonva:

$$a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2(\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma).$$

A (2) feltételből következik, hogy $-1 < \cos \alpha \leq \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma \leq -\cos \gamma < 1$, tehát $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma$ 1-nél kisebb abszolútértékű szám, amiért

$$a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az a_3, a_4, a_5 szakaszokból szerkeszthető háromszög hegyesszögű.