Tegyük fel, hogy nem igaz a feladat állítása, vagyis minden a valós számra

$$f\left(a+\frac{1}{f(a)}\right)\geq 2f(a).$$

Definiáljuk az $a_0, a_1, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_0=0, \qquad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{f\left(a_n\right)}.$$

Az indirekt feltevés alapján a tetszőleges n nemnegatív egész számra:

$$f\left(a_{n+1}\right)=f\left(a_n+\frac{1}{f\left(a_n\right)}\right)\geq 2f(a_n);$$

ebből n szerinti indukcióval azt kapjuk, hogy

$$f(a_n)\geq 2^n f(a_0). \tag{1}$$

Megmutatjuk viszont, hogy az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. A rekurziót és (1)-et felhasználva:

$$\begin{aligned}
a_n = a_n-a_0 &= (a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1}) = \\
&= \frac{1}{f(a_0)}+\frac{1}{f(a_1)}+\frac{1}{f(a_2)}+\cdots+\frac{1}{f(a_{n-1})}\geq \\
&\geq \frac{1}{f(a_0)}+\frac{1}{2f(a_0)}+\frac{1}{4f(a_0)}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}f(a_0)} = \\
&= \frac{1}{f(a_0)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

Mivel $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$, azért az

$$a_n\leq\frac{1}{f(a_0)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)<\frac{2}{f(a_0)}.$$

Az $\{a_n\}$ sorozatnak tehát minden eleme kisebb, mint $\frac{2}{f(a_0)}$, a sorozat felülről korlátos.

Legyen $b=\frac{2}{f(a_0)}$. Mivel az f függvény monoton nő, és minden $n\geq 0$ egészre $a_n<b$,

$$f(a_n)\leq f(b). \tag{2}$$

Ha most összevetjük (1)-et és (2)-t, ellentmondásra jutunk:

$$\begin{gathered}
2^n f(a_0)\leq f(a_n)\leq f(b),\\
2^n\leq\frac{f(b)}{f(a_0)}.
\end{gathered}$$

Ez az egyenlőtlenség azt állítja, hogy minden 2-hatvány kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{f(b)}{f(a_0)}$, ami lehetetlen.

Az indirekt feltevésből ellentmondásra jutottunk, tehát az állítás igaz.