

I. megoldás. Ábránkon BE párhuzamos az f_a szögfelezővel.

1993-12-508-1.eps

Az *ábra* jelölései szerint $BE = 2 \cdot c \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. A párhuzamos szelők tétele alapján $\frac{f_a}{BE} = \frac{b}{b+c}$, amiből BE előbbi kifejezését fölhasználva:

$$(1) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{f_a(b+c)}{2bc}.$$

A koszinusztétel szerint

$$(2) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Tudjuk, hogy $\cos^2 \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, ezért (1) és (2)-ből

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\frac{f_a(b+c)^2}{2b^2c^2} - 1 \right).$$

Utóbbi összefüggésünkből

$$\begin{aligned} f_a^2 &= \frac{b \cdot c}{(b+c)^2} ((b+c)^2 - a^2) = \frac{b \cdot c}{(b+c)^2} (b+c+a)(b+c-a) = \\ &= \frac{b \cdot c}{(b+c)^2} \cdot 4s(s-a), \end{aligned}$$

így

$$(3) \quad f_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}.$$

A (3)-hoz hasonló képleteket nyerhetünk f_b -re és f_c -re is. Tekintsük ezután a szögfelező szakaszok szorzatát:

$$f_a \cdot f_b \cdot f_c = \frac{8abcs \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Ebből

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{(a+b)(a+c)(b+c) \cdot f_a \cdot f_b \cdot f_c}{8abcs},$$

ami a Heron-képlet szerint azt mutatja, hogy a háromszög területe feltételeink mellett racionális.

Rónai András (Budapest, Dózsa Gy. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az első megoldásból (1) szerint $\cos \frac{\alpha}{2}$ racionális.

Könnyen megmutatható, hogy $\sin \alpha$ is racionális. Ehhez felhasználjuk a

$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ azonosságot. (Igazolása megtalálható a Geometriai feladatok gyűjteménye II. 434.a) feladat megoldásánál). Ebből az összefüggésből

$$\sin \alpha \left(1 + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2},$$

amiből már látszik, hogy $\sin \alpha$ racionális, hiszen a bal oldalon a zárójelben szereplő törtek a szinusz-tétel szerint racionális számok, a jobb oldalon lévő félszögek koszinusza pedig az első megoldásban látottak alapján racionális. Így $t = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$ is racionális.

Markót Mihály (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.) megoldása alapján

Megjegyzések: 1. Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e a feladat feltételeinek megfelelő háromszög. Erre szükséges és elegendő feltételt találunk A Matematika Tanítása c. folyóirat 1981. évi 1. számában, dr. Kelemen József cikkében.

Példaként oldalaival megadunk egy olyan háromszöget, amelynek szögfelezőszakaszai is racionálisak: $a = 231$, $b = 250$, $c = 289$.

2. Mindkét megoldásból kiderül, hogy a feladatban szereplő háromszög bármelyik szögének vagy félszögének szinusza és koszinusza racionális.