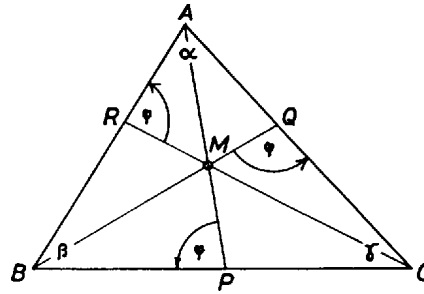
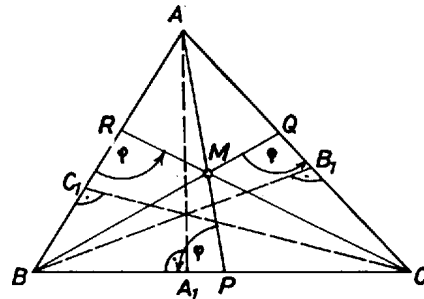


Legyen az  $AM$  és  $BC$  egyenesek metszéspontja  $P$ , és hasonlóan értelmezzük az *ábrák*  $Q$  és  $R$  pontjait.



1. ábra

A feladat szövegében szereplő hajlásszögeket  $\varphi$ -vel jelöljük ( $\varphi \leq 90^\circ$ ). Könnyen látható, hogy a feltételnek kétféle *ábra* felelhet meg. Ha  $\varphi = 90^\circ$ , akkor készen vagyunk. Tegyük fel ezután, hogy az 1. *ábra* szerinti esetben  $\varphi < 90^\circ$ . Mivel  $\varphi$  külső szöge az  $AQB$ ,  $BRC$ ,  $CPA$  háromszögeknek, ezért  $\alpha, \beta, \gamma < \varphi < 90^\circ$ . Mindez azt jelenti, hogy az  $A, B, C$  csúcsokból induló magasságok rendre az  $ABP$ ,  $BCQ$ , illetve  $CAR$  háromszögek belsejében haladnak. Ekkor azonban az  $A$ -ból, illetve  $B$ -ből kiinduló magasságok a  $BMP$  háromszög belsejében metszik egymást. Ezért, mivel a harmadik magasság a  $CAR$  háromszög belsejében halad, a háromszög három magasságvonala nem mehet át egy ponton. Ez ellentmondás, tehát  $M$  a háromszög magasságpontja.



2. ábra

Tegyük fel ezután, hogy a 2. *ábra* szerinti esetben  $\varphi \leq 90^\circ$ . Az  $A$ -ból,  $B$ -ből és  $C$ -ből induló magasságvonalak talppontját  $A_1$ -gyel,  $B_1$ -gyel és  $C_1$ -gyel, a háromszög oldalait pedig a szokásos módon  $a, b, c$ -vel jelölve:

$$\begin{aligned} BP &= BA_1 + A_1P = c \cos \beta + c \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi, \\ PC &= A_1C - A_1P = b \cos \gamma - b \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi, \\ CQ &= CB_1 + B_1Q = a \cos \gamma + a \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi, \\ QA &= B_1A - B_1Q = c \cos \alpha - c \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi, \\ AR &= AC_1 - RC_1 = b \cos \alpha - b \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi, \\ RB &= C_1B + RC_1 = a \cos \beta + a \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Ceva tétele szerint

$$BP \cdot CQ \cdot AR = PC \cdot QA \cdot RB,$$

azaz

$$\begin{aligned} c(\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi) a(\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi) b(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi) = \\ = b(\cos \gamma - \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi) c(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi) a(\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned}$$

Egyszerűsítés után ebből

$$\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi = \cos \gamma - \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi,$$

tehát  $\varphi = 90^\circ$ .