I. megoldás. Legyen az AB, illetve CD élben találkozó lapok szöge derékszög. Az *ábrán* feltüntettük ezeknek a lapoknak az AB, illetve CD oldalakhoz tartozó magasságait. Vegyünk fel egy AB-re merőleges S síkot, és vetítsük erre merőlegesen a tetraédert. A vetületet az *ábrán* láthatjuk.

1993-10-310-1.eps

Az ABC lap vetülete egy m_c, az ABD lap vetülete pedig egy m_d hosszúságú szakasz, amelyek a feltétel szerint derékszöget zárnak be. Ezért

$$m_c^2+m_d^2=(C'D')^2. \tag{1}$$

Az S síkra való merőleges vetítésben CD vetítősíkja párhuzamos AB-vel. Ebben a vetítősíkban van a $CDD'C'$ négyszög. Legyen ezen a síkon AB merőleges vetülete $A'B'$. Az AB és CD kitérő egyenesek α hajlásszöge ezen a síkon eredeti nagyságában látszik, amiért $C'D'=CD\cdot\sin\alpha$. Ennek alapján (1)-ből $m_c^2+m_d^2=CD^2\cdot\sin^2\alpha$. Mindkét oldalt $\dfrac{AB^2}{4}$-gyel szorozva:

$$\left(\frac{AB\cdot m_c}{2}\right)^2+\left(\frac{AB\cdot m_d}{2}\right)^2=\left(\frac{AB\cdot CD\cdot\sin\alpha}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel megmutathatjuk, hogy

$$\left(\frac{CD\cdot m_a}{2}\right)^2+\left(\frac{CD\cdot m_b}{2}\right)^2=\left(\frac{AB\cdot CD\cdot\sin\alpha}{2}\right)^2. \tag{3}$$

A (2) és (3) összefüggésekből következik a feladat állítása.

Dőtsch András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Jelöljük pl. az ABC lap területét t_D-vel, a t_D hosszúságú és ABC síkjára merőleges (kifelé irányított) vektort $\overrightarrow{t_D}$-vel. Ismert tétel, hogy egy poliéder kifelé irányított lap-területvektorainak összege zérusvektor. (Lásd pl. *Hajós György*: Bevezetés a geometriába c. könyvének 322. oldalán.) A feladat feltételei szerint $\overrightarrow{t_A}$ és $\overrightarrow{t_B}$, valamint $\overrightarrow{t_C}$ és $\overrightarrow{t_D}$ merőlegesek, ezért a skaláris szorzatuk nulla:

$$\overrightarrow{t_A}\cdot\overrightarrow{t_B}=0\quad\text{és}\quad\overrightarrow{t_C}\cdot\overrightarrow{t_D}=0. \tag{4}$$

Az említett tétel szerint $\overrightarrow{t_A}+\overrightarrow{t_B}+\overrightarrow{t_C}+\overrightarrow{t_D}=\overrightarrow{0}$, azaz $\overrightarrow{t_A}+\overrightarrow{t_B}=-(\overrightarrow{t_C}+\overrightarrow{t_D})$, amiből $(\overrightarrow{t_A}+\overrightarrow{t_B})^2=(\overrightarrow{t_C}+\overrightarrow{t_D})^2$. A négyzetre emelést elvégezve és (4)-et fölhasználva:

$$t_A^2+t_B^2=t_C^2+t_D^2.$$