I. megoldás. Írjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget

$$m \leqslant \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot c + \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} - (a+b) \tag{1}$$

alakba.

Először bebizonyítjuk, hogy

$$m \leqslant \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot c, \tag{2}$$

majd pedig azt, hogy

$$\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant a+b. \tag{3}$$

Ezekből már következik a feladat állítása.

1993-10-307-1.eps

1. ábra

A (2) állítás belátásához használjuk az *1. ábrát.* Az ábra jelöléseivel $m = OF + OC \cdot \sin\varphi$, ami adott $c$ésγ esetén csak φ -től függ, és akkor maximális, ha $\varphi = 90^\circ$. Ezért m akkor lesz a legnagyobb, ha átmegy a körülírt kör O középpontján, azaz ha háromszög egyenlő szárú. A *2. ábra* alapján a maximális m-re $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\mathrm{c}}{2\mathrm{m}}$, amiből $m = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot c$. Ezért általában $m \leqslant \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot c$.

1993-10-307-2.eps

2. ábra

1993-10-307-3.eps

3. ábra

A (3) egyenlőtlenség igazolásához tekintsük a *3. ábrát.* A BDS derékszögű háromszögből $BS < BD$, és ha $a = b$, akkor $BS = BD$, ezért bármely háromszög esetén $BS \leqslant BD$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $AT \leqslant AD$. Ezért $BS + AT \leqslant BD + AD = AB = c$. Ebből, és a $BS = a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$, valamint $AT = b \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ összefüggésekből

$$a \cdot \sin\frac{\gamma}{2} + b \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant c, \tag{4}$$

és itt egyenlőség csak egyenlő szárú háromszög esetén áll fenn. Látjuk, hogy (4) ekvivalens (3)-mal, tehát igaz a feladat állítása. Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha $a = b$.

Zsenei András (Bp., ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen $a + b + m = k \cdot c$. Az $a = 2r \cdot \sin\alpha$ összefüggés alapján $m = 2r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$, és így

$$k = \frac{a+b+m}{c} = \frac{2r\sin\alpha + 2r\sin\beta + 2r\sin\alpha\sin\beta}{2r\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Közismert összefüggésekkel:

$$k=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}}{\sin\gamma}=$$
$$=\frac{2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{2\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1+\cos\gamma}{2}}{\sin\gamma}=$$
$$=\frac{2\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+4\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma-1}{2\sin\gamma}.$$

Ez a kifejezés a pozitív $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$-nek szigorúan monoton növő másodfokú függvénye. Tekintve, hogy $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$, k akkor lesz legnagyobb, ha $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=1$, azaz ha a háromszög egyenlő szárú. Így azt nyertük, hogy

$$k\leqslant\frac{4\cdot\cos\frac{\gamma}{2}+1+\cos\gamma}{2\cdot\sin\gamma}=\frac{4\cdot\cos\frac{\gamma}{2}+2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\cdot 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{2+\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Tehát valóban

$$a+b+m\leqslant\frac{2+\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot c.$$