I. megoldás. Mivel $z=-(x+y)$, ezért

$$\sin z = -\sin(x+y) = -2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Másrészt az ismert azonosság szerint

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y+\sin z &\le |\sin x+\sin y| + |\sin z| = \\ &= 2\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x-y}{2}\right| + 2\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \le \\ &\le 2\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right).\end{aligned}$$

Az utóbbi szorzatot jelöljük A-val. Felhasználva a

$$\sin^2 t = 1-\cos^2 t = (1-|\cos t|)(1+|\cos t|)$$

azonosságot, valamint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}A^2 &= 3\sin^2\frac{x+y}{2}\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)^2 = \\ &= \left(3-3\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)\cdot\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)^3 \le \\ &\le \left(\frac{\left(3-3\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)+3\cdot\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16};\end{aligned}$$

ebből $A^2 \le \dfrac{27}{4}$ és $A \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

II. megoldás. Válasszuk meg az u, v, w számokat úgy, hogy azok a $[0, 2\pi)$ intervallumba essenek, és $u-x, v-y, w-z$ a 2π többszörösei legyenek.

Ekkor, mivel a szinusz-függvény 2π szerint periodikus, $\sin x = \sin u$, $\sin y = \sin v$ és $\sin z = \sin w$. Másrészt $u+v+w = (u-x)+(v-y)+(w-z)$, tehát $u+v+w$ a 2π többszöröse.

Ha $\sin u$, $\sin v$, $\sin w$ közül valamelyik nem pozitív, akkor az összegük legfeljebb 2. Mivel pedig $2 < \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, az állítás teljesül.

Feltehetjük tehát, hogy $\sin u, \sin v, \sin w$ mindegyike pozitív; ez azt jelenti, hogy u, v, w mindegyike a $(0,\pi)$ intervallumba esik. Ebben az esetben azonban $0 < u+v+w < 3\pi$. A 2π egyetlen ilyen többszöröse ő maga, tehát $u+v+w = 2\pi$.

Mivel a szinusz-függvény a $(0,\pi)$ intervallumban szigorúan konkáv, a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\sin u+\sin v+\sin w}{3} \le \sin\frac{u+v+w}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Megjegyzés. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $y = \dfrac{2\pi}{3}+2l\pi$ és $z = \dfrac{2\pi}{3}-2(k+l+1)\pi$, ahol k, l egész számok. Ez mindkét megoldásból leolvasható.