Trapéz rombuszba írásán azt értjük, hogy a trapéz csúcsai a rombusz határán vannak. Ha a rombusz négyzet, akkor egyetlen maximális területű szimmetrikus trapéz írható bele, önmaga.

1993-09-259-1.eps

*1. ábra*

Az *1. ábrán* a $KLMN$ rombuszba beírt szimmetrikus trapézt rajzoltunk meg, $AB \parallel CD$, és tükröztük a trapézt a rombusz $O$ középpontjára. Ha $AB$, illetve $CD$ felezőpontja $F$, illetve $G$, akkor $K, F, G'$, továbbá $M, F', G$ egy egyenesen vannak, és

$$GF \perp AB, \quad G'F' \perp A'B'. \qquad (1)$$

Tekintsük az $ABD'C'$ trapéz $A_1B_1$ középvonalát. Ennek $H$ felezőpontja illeszkedik a $KF$ egyenesre, és a $H$ pont felezi az $FG'$ szakaszt is. Hasonlót mondhatunk az $A'B'DC$ trapéz $C_1D_1$ középvonalának $J$ felezőpontjáról. Könnyen beláthatjuk, hogy

$$A_1B_1 = C_1D_1 = \frac{AB + CD}{2}, \qquad (2)$$

továbbá $HJ$ párhuzamos $GF$-fel, és így (1) szerint $HJ \perp C_1D_1$ és $HJ \perp A_1B_1$. Ezért $A_1B_1C_1D_1$ olyan téglalap, amelynek középpontja $O$. Azt is láthatjuk, hogy e téglalap és a trapéz magassága egyenlő, $FG = HJ$, ezért (2) miatt a területük is megegyezik.

Nézzük meg ezután, hogyan szerkeszthető adott rombuszba téglalap. Mivel a rombusz és a téglalap $O$ középpontja megegyezik, ezért a téglalap csúcsai $O$ -tól egyenlő távolságra vannak, így illeszkednek egy $O$ középpontú körre. A *2. ábrán* láthatjuk, hogyan szerkeszthetők ilyen téglalapok.

1993-09-260-1.eps

*2. ábra*

Az ábra $A_1'B_1'C_1'D_1'$ téglalapjánál az $A_1'C_1'$ átló nagyobb, mint a rombusz kisebbik átlója, a többi esetben legfeljebb akkora. Az előbbinél mindegyik rombuszoldalon egy-egy téglalap csúcs lesz, és ekkor e téglalap valamelyik két oldalával párhuzamos alapokkal rendelkező beírt szimmetrikus trapéz szimmetriatengelye az egyik rombuszátló.

1993-09-260-2.eps

*3. ábra*

A *3. ábra* jelöléseit használva számítsuk ki a beírt trapéz oldalai által levágott háromszögek területeinek $t$ összegét: $t = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2(1-x)y}{2} + \frac{(1-y)^2}{2}\right] \sin\alpha = \frac{(x-y)^2+1}{2} \sin\alpha$. Ha $t$ minimális, akkor a beírt trapéz területe maximális lesz. Ez pontosan akkor következik be, ha $x = y$. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok ilyen típusú trapéz van, ezek területe a rombusz területének a fele.

1993-09-260-3.eps

*4. ábra*

A *2. ábra* további téglalapjai olyanok, hogy két szemközti oldaluk a rombusz két szemközti oldalára illeszkedik. Ilyen esetet rajzoltunk meg a *4. ábrán*, ahol a rombusz hegyesszöge $60°$-nál nagyobb. Az ilyen típusúak között maximális területű téglalap oldalait szaggatott vonallal rajzoltuk meg, vele egyenlő területű a $KNPL$ beírt szimmetrikus trapéz, és ez a terület most nagyobb, mint a rombusz területének a fele. (Ha a rombusz hegyesszöge legfeljebb $60°$, akkor ez a terület legfeljebb a rombusz területének a fele.)

Olyan trapéz, mint a $KNPL$, négy van, hiszen a trapéz hosszabbik alapja a rombusz bármelyik oldalával egybeeshet, és két, velük egyenlő területű beírt téglalap létezik. A *4. ábra* szerinti rombuszba tehát 6 maximális területű szimmetrikus trapéz írható.

*Összefoglalva:* Ha $LKN\sphericalangle \le 60°$, akkor a rombuszba végtelen sok maximális területű szimmetrikus trapéz írható, és a maximális terület a rombusz területének a fele. Ha $60° < LKN\sphericalangle < 90°$, akkor 6 maximális területű beírt szimmetrikus trapéz lesz (ezek területe nagyobb a rombusz félterületénél), végül ha a rombusz négyzet, akkor csak egy (saját maga).

*Megjegyzés.* A beírást általánosabban is értelmezhettük volna, éspedig úgy, hogy a trapéz minden csúcsa a rombusznak határpontja vagy belső pontja legyen. A feladat kérdésére adandó válasz azonban ekkor is ugyanaz lesz.