I. megoldás. Legyen az egyenlet $x^3+ax^2+bx+c=0$, a gyökök legyenek x_1, x_2, x_3. A Viéte-formulák (a gyökök és együtthatók közötti összefüggések) szerint

$$\begin{aligned} a &= -(x_1+x_2+x_3); \\ b &= x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3; \\ c &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek alapján

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b$$

és

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-a^3+3ab-3c.$$

A feladatban szereplő információk tehát a, b, c segítségével felírva:

$$\begin{aligned} -c &= a+2, \\ a^2-2b &= 10, \\ -a^3+3ab-3c &= 6. \end{aligned} \tag{1}$$

Az első egyenletből $c=a-2$; a másodikból $b=\dfrac{a^2}{2}-5$. Ezeket helyettesítsük be a harmadik egyenletbe:

$$-a^3+3a\left(\frac{a^2}{2}-5\right)-3(a-2)=6.$$

Rendezve:

$$\begin{aligned} -2a^3+3a(a^2-10)-6(a-2) &= 12; \\ a^3-36a &= 0; \\ a(a-6)(a+6) &= 0. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek három megoldása van: $a_1=0,\ a_2=6,\ a_3=-6$. Az ezekhez tartozó b és c értékek a $b=\dfrac{a^2}{2}-5$ és $c=a-2$ egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} b_1 &= -5, & b_2 &= 13, & b_3 &= 13; \\ c_1 &= -2, & c_2 &= 4, & c_3 &= -8. \end{aligned}$$

Erre a három számhármasra az (1) egyenletrendszer teljesül, azt viszont meg kell vizsgálnunk, hogy a megfelelő egyenleteknek valóban három valós gyöke van-e. A három egyenlet:

$$x^3-5x-2=0; \tag{2}$$
$$x^3+6x^2+13x+4=0; \tag{3}$$
$$x^3+6x^2+13x-8=0. \tag{4}$$

Ismeretes, hogy az $y^3+py+q=0$ egyenlet gyökeinek száma az egyenlet diszkriminánsának, $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2$-nek előjeléből olvasható ki:

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor egyetlen, egyszeres valós gyök van. Ha negatív, akkor három különböző valós gyöke van az egyenletnek. Ha a diszkrimináns 0 és p, q valamelyike nem 0, akkor egy kétszeres és egy egyszeres valós gyöke van az egyenletnek. (Ha $p=q=0$, akkor az $y=0$ háromszoros gyök.)

A (2) egyenlet diszkriminánsa $\left(\dfrac{-5}{3}\right)^3+\left(\dfrac{-2}{2}\right)^2$ negatív, tehát 3 különböző valós gyök van. A (3) és (4) egyenlet bal oldalát alakítsuk teljes köbbé, hogy a diszkriminánst ki tudjuk számítani:

$$(x+2)^3+(x+2)-6=0; \tag{3'}$$
$$(x-2)^3+(x-2)+2=0. \tag{4'}$$

Ezek diszkriminánsa $\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{-6}{2}\right)^2$, illetve $\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{2}\right)^2$; mindkettő pozitív. Ezeknek az egyenleteknek tehát csak egy gyöke van, így nem megoldásai a feladatnak.

A keresett egyenlet tehát:

$$x^3-5x-2=0.$$

Megjegyzés. Azt hogy a (3) és (4) egyenleteknek csak egy gyöke valós, többen úgy próbálták bebizonyítani, hogy megmutatták: a baloldalon álló polinom deriváltja mindenhol pozitív; ebből következik, hogy a baloldal szigorúan monoton nő és nem lehet két különböző helyen 0.

Ez a megoldás ebben a formában hiányos, mert nem zárja ki a többszörös gyök lehetőségét. (A többszörös gyököt nem nehéz kizárni; pl. ahol többszörös gyök van, ott a derivált is 0, a mi esetünkben viszont pozitív.)

Ezek a dolgozatok 4 pontot kaptak.

II. megoldás. Legyen a keresett egyenlet ismét $x^3+ax^2+bx+c=0$, a gyökök x_1, x_2, x_3. A feladat szövege szerint

$$x_1x_2x_3=x_1+x_2+x_3+2; \tag{5}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=10; \tag{6}$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=6. \tag{7}$$

Vonjuk ki (7)-ből (5) 3-szorosát és rendezzük át a következőképpen, felhasználva az

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)(u^2-uv+v^2-vw+w^2-wu)$$

azonosságot:

$$\begin{gathered}x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=-3(x_1+x_2+x_3),\\ (x_1+x_2+x_3)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_3x_1+3)=0.\end{gathered} \tag{8}$$

A második tényező biztosan nem 0, mert

$$\begin{gathered}x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2-x_3x_1+3=\\ =\frac{(x_1-x_2)^2}{2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{2}+\frac{(x_3-x_1)^2}{2}+3\geqslant 3.\end{gathered}$$

Az egyenlet ezért csak úgy teljesülhet, ha $x_1+x_2+x_3=0$. Ekkor

$$\begin{aligned}&a=-(x_1+x_2+x_3)=0,\\ &c=-x_1x_2x_3=-(x_1+x_2+x_3+2)=-2 \text{ és}\\ &b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}=\frac{0^2-10}{2}=-5.\end{aligned}$$

A keresett egyenlet tehát csak $x^3-5x-2=0$ lehet.

Az, hogy ennek valóban három gyöke van, az I. megoldásban leírt módon bizonyítható.

Az (5) és a (6) egyenlet b és c választása alapján teljesül, a harmadik egyenlet pedig azért áll fenn, mert a választása miatt a (8) egyenlet teljesül, (7)-et pedig úgy kapjuk, hogy (8)-hoz hozzáadjuk (5) 3-szorosát.

A kapott egyenlet tehát valóban megoldása a feladatnak.