Először $f$-et egyszerűbb alakba írjuk át az
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ és a $\sin 2x=2\sin x\cos x$ azonosságok felhasználásával:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4-3(\sin^6 x+\cos^6 x)}{\sin x\cos x} = \\ &= \frac{4-3((\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x))}{\sin x\cos x} = \\ &= \frac{4-3(1-3\sin^2 x\cos^2 x)}{\sin x\cos x} = \frac{1+9(\sin x\cos x)^2}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}+\frac{9}{2}\sin 2x. \end{aligned}$$

Legyen $y=\sin 2x$. Mivel $2x$ a $(0,\pi)$ intervallum tetszőleges pontja lehet, és ebben az intervallumban a szinuszfüggvény értékkészlete a $(0,1]$ intervallum, a keresett halmaz a

$$g(y)=\frac{2}{y}+\frac{9}{2}y$$

függvény értékkészlete a $(0,1]$ halmazon.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$g(y)=\frac{\frac{4}{y}+9y}{2}\geqslant\sqrt{\frac{4}{y}\cdot 9y}=\sqrt{36}=6.$$

Ha $y=\dfrac{2}{3}$, akkor egyenlőség áll fenn.

Az értékkészlet tehát része a $[6,\infty)$ intervallumnak és tartalmazza a 6-ot. Azt kell még megmutatni, hogy ha $c>6$, akkor $g$ felveszi $c$-t a $(0,1]$ intervallumban, azaz a

$$\frac{2}{y}+\frac{9}{2}y=c$$

egyenletnek van megoldása $(0,1]$-ben.

Az egyenletet átalakítva:

$$\frac{9}{2}y^2-cy+2=0. \tag{1}$$

Ennek a diszkriminánsa $c^2-36>0$, tehát két valós gyök van. A gyökök szorzata $\dfrac{4}{9}$; ebből következik, hogy a két gyök azonos előjelű, és nem lehet mindkettő $\dfrac{2}{3}$-nál nagyobb abszolút értékű.

Mivel a gyökök összege $\dfrac{2c}{9}$ pozitív, mindkét gyök pozitív.

Az (1) egyenletnek tehát két pozitív megoldása van; ezek közül a kisebbik legfeljebb $\dfrac{2}{3}$. A $g$ függvény ezek szerint felveszi $c$-t a $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$ intervallumban.

Tehát az $f$ függvény értékkészlete a $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban a $[6,\infty)$ félegyenes.

*Megjegyzés.* Azt, hogy $g$ felveszi $c$-t a $(0,1]$ intervallumban, a Bolzano-tétel segítségével is igazolhatjuk. Mivel $\lim\limits_{y\to 0+0} g(y)=+\infty$, a $g$ függvény felvesz $c$-nél nagyobb értékeket, és $g\left(\dfrac{2}{3}\right)=6<c$ szerint $c$-nél kisebb értékeket is. A $g$ folytonos, tehát a Bolzano-tétel szerint (0 és $\dfrac{2}{3}$közötti helyen) $c$-t is fel kell vennie.