Legyen a kocka éle a, a feladatban említett belső pont M, és válasszuk meg úgy a csúcsok jelölését, hogy $MA=\sqrt{50}$, $MB=\sqrt{70}$, $MC=\sqrt{90}$, $MD=\sqrt{110}$ legyen. Jelölje pl. az A csúcsot tartalmazó három lapnak és az M pontnak a távolságát x, y, z az *ábra* szerint.

1993-04-165-1.eps

A Pitagorasz-tétel alapján

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=50,\\ (a-x)^2+(a-y)^2+z^2&=70,\\ (a-x)^2+y^2+(a-z)^2&=90,\\ x^2+(a-y)^2+(a-z)^2&=110. \end{aligned}$$

A második, harmadik és negyedik egyenletben a négyzetreemeléseket elvégezve, $x^2+y^2+z^2$ helyett 50-et írva:

$$\begin{aligned} 2a(x+y)&=2a^2-20,\\ 2a(x+z)&=2a^2-40,\\ 2a(y+z)&=2a^2-60. \end{aligned}$$

Ebből az egyenletrenszerből $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{2}-\frac{10}{a}$, $z=\frac{a}{2}-\frac{20}{a}$. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{20}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{10}{a}\right)^2=50,$$

amiből a

$$\frac{3a^2}{4}-80+\frac{500}{a^2}=0,$$

majd $t=\frac{a^2}{4}$ jelöléssel a

$$3t^2-80t+125=0$$

egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $t=25$ és $t=\frac{5}{3}$, így $a=10$, vagy $\alpha=\sqrt{\frac{20}{3}}$. A második esetben $y<0$ miatt M nem lehetne belső pont, ezért a feladat egyetlen megoldása: $a=10$ egység.

Matuszka Kristóf (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján