Legyenek a háromszög oldalai $a,\ b,\ c$, egy megfelelő belső pont P, ennek az oldalaktól való távolságai $d_a,\ d_b,\ d_c$ (az oldalaktól vett távolságot az oldalegyenesektől való távolságként tekintjük). A keresett P pontok esetén $d_a,\ d_b,\ d_c$-re teljesülniük kell a háromszög-egyenlőtlenségeknek. Messék a háromszög belső szögfelezői az oldalakat az A', B' és C' pontokban az *ábra* szerint.

1993-04-164-1.eps

Először megmutatjuk, hogy pl. a $B'C'$ szakasz tetszőleges Q pontjának az oldalegyenesektől való $x,\ y,\ z$ távolságaira $y+z=x$. Tekintve, hogy C' a C-ből induló szögfelező egy pontja, $C'K=C'K'=k$, és így a $C'B'K'$ és $QB'Y$ hasonló háromszögekből

$$\frac{QB'}{B'C'}=\frac{y}{k}, \quad \text{amiből} \quad y=\frac{QB'}{B'C'}k. \tag{1}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$z=\frac{QC'}{B'C'}h. \tag{2}$$

A $C'QL$ és $C'B'M$ hasonló háromszögekből

$$\frac{QC'}{x-k}=\frac{QB'}{h-x}. \tag{3}$$

(3)-ból x-et kifejezve: $x=\frac{QB'}{B'C'}k+\frac{QC'}{B'C'}h$. Ezért (1) és (2) alapján $x=y+z$, amint azt állítottuk.

Tekintsük ezután az A középpontú középpontos hasonlóságot. Ha ennek aránya 1-nél nagyobb, és az előbbi Q pont képe P, akkor a nagyításban az előbbi y és z szakasz növekszik, x pedig csökken, ezért a P pontra teljesülni fog a $d_a<d_b+d_c$ egyenlőtlenség. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $A'B'$ vagy $A'C'$ bármely pontját C-ből ill. B-ből 1-nél nagyobb arányú középpontos hasonlósággal leképezve a képpontra, teljesülni fognak a $d_c<d_a+d_b$, ill. $d_b<d_a+d_c$ egyenlőtlenségek.

Mindhárom egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a P pont az $A'B'C'$ háromszög belső pontja. A keresett P pontok halmaza tehát az $A'B'C'$ háromszög belseje.

Hátra van még annak meghatározása, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe, $T_{(A'B'C')}$ hányadrésze az ABC háromszög területének, $T_{(ABC)}$-nek. Látható, hogy

$$T_{(A'B'C')}=T_{(ABC)}-T_{(AB'C')}-T_{(CA'B')}-T_{(BC'A')},$$

amiből

$$\frac{T_{(A'B'C')}}{T_{(ABC)}}=1-\frac{T_{(AB'C')}}{T_{(ABC)}}-\frac{T_{(CA'B')}}{T_{(ABC)}}-\frac{T_{(BC'A')}}{T_{(ABC)}}. \tag{4}$$

Számítsuk ki először $T_{(AB'C')}$-t. A szögfelező osztási arányára vonatkozó tétel szerint $AC'=\frac{bc}{a+b}$, $AB'=\frac{bc}{a+c}$, ezért $T_{(AB'C')}=\frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}\sin\alpha$.

Így

$$\frac{T_{(AB'C')}}{T_{(ABC)}}=\frac{\frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}\sin\alpha}{\frac{1}{2}bc\sin\alpha}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Hasonlóan számíthatjuk ki a (4) jobb oldalán szereplő további arányokat. Ezért (4) így alakul:

$$\frac{T_{(A'B'C')}}{T_{(ABC)}}=1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ab}{(c+a)(c+b)}-\frac{ac}{(b+a)(b+c)}=$$
$$=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Megjegyzés: A feladat megoldásai megtalálhatók a Középiskolai Matematikai Versenyek 1985 -1987. c. könyv 153-159. oldalain.