I. megoldás. Tekintsük az összes olyan összekötési lehetőséget, amelyben n szakasz szerepel, és mindegyiknek a végpontjai különböző színűek. Ilyen összesen $n!$ számú van, tehát véges sok, ezért van közöttük minimális összhosszúságú. Válasszunk egy ilyen minimális hosszúságú szakasz-rendszert – ha több ilyen is van, valamelyiket. Állítjuk, hogy ebben nincsen metsző szakaszpár. Tegyük fel ugyanis, hogy AB és CD olyan szakaszok, amelyek végpontjai kölünböző színűek – például A és C piros, B és D kék – és van közös pontjuk, *ábránkon* ez az M pont. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$BC < BM + MC \text{ és } AD < AM + MD,$$

és ezekből:

$$AD + BC < CD + AB.$$

1993-09-258-1.eps

Ez ellentmond annak, hogy az AB és CD szakaszokat tartalmazó szakaszrendszer összhossza minimális volt. Ezért igaz a feladat állítása.

A leírt eljárás nemcsak a kívánt n összekötő szakasz létezését bizonyítja, hanem konstrukciót is tartalmaz a szakaszok meghúzására. Ha a piros-kék pontpárokat valahogy már összekötöttük n szakasszal, akkor a keresztezőket az *ábra* szerint módosítva, az n szakasz összhossza minden lépésben csökken, és az eljárás véges sok lépés után véget ér.

Sánta Zsuzsa (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. I. o. t.)

II. megoldás. A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$-re az állítás igaz. Tegyük föl ezután, hogy az állítás minden n-nél kisebb pozitív egészre igaz. Megmutatjuk, hogy ekkor n-re is igaz. Ehhez elegendő olyan egyenest találni, amelynek egyik oldalán ugyanannyi (n-nél kevesebb, de 0-nál több) piros pont van, mint kék. Tekintsük a $2n$ pont konvex burkát, és ezen belül egy új P pontot úgy, hogy a $2n+1$ pont közül semelyik 3 ne essen egy egyenesre. Ilyen P pont biztosan van, hiszen a $2n$ pont $\binom{2n}{2}$ véges számú egyenest határoz meg, és P-t felvehetjük úgy, hogy ezen egyenesek egyikére se illeszkedjék. Húzzunk P-n át egy olyan e egyenest, amelyen egy sincs az adott $2n$ pont közül. Ha az e egyenes egyik oldalán ugyanannyi piros pont van mint kék, akkor készen vagyunk, mert így e mindkét oldalán lévő pontokra alkalmazható az indukciós feltevés. Ellenkező esetben legyen e jobb oldalán p darab piros pont és k darab kék. Forgassuk el az e egyenest P körül $180°$-kal. Ha e a forgatás közben egy pontot átlép, a $p-k$ különbség 1-gyel változik (nő vagy csökken). $180°$-os forgatás után az e egyenes jobb oldalán lévő piros és kék pontok számának különbsége $(n-p)-(n-k) = -(p-k)$ lesz. Mivel az e egyenes forgatása közben egy-egy pontot átlépve $p-k$ mindig 1-gyel változott, és $180°$ forgás után az ellentettje lett, volt egy olyan helyzet, amikor $p-k$ értéke zérus volt. Ekkor az e egyenes mindkét oldalán ugyanannyi a piros pont mint a kék, és alkalmazható az indukciós feltevés.

Ruzsa Zoltán (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. IV. o. t.)