Először az $n \geq 4$ esetben bizonyítjuk be az állítást.

Becsüljük felülről a bal oldali törtek egyikét a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\frac{a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n}{a_k + n - 2} \leq \frac{\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_n}{n-1}\right)^{n-1}}{a_k + n - 2} <$$

$$< \frac{\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n-1}\right)^{n-1}}{n-2} = \frac{1}{(n-2)(n-1)^{n-1}}.$$

Mivel ez mind az n tagra igaz,

$$\frac{a_2 a_3 \dots a_n}{a_1 + n - 2} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}{a_n + n - 2} < \frac{n}{(n-2)(n-1)^{n-1}} \leq \frac{n}{(n-2)(n-1)^3}.$$

Nyilván elég megmutatni, hogy

$$\frac{n}{(n-2)(n-1)^3} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Beszorozva $(n-2)(n-1)^3$-nel és rendezve:

$$n \leq (n-2)(n-1),$$

$$0 \leq n^2 - 4n + 2,$$

$$0 \leq n(n-4) + 2.$$

Mivel $n \geq 4$, a jobb oldal legalább 2. Ezzel az állítást $n \geq 4$-re beláttuk. Egyenlőség ilyenkor nem állhat fenn.

Most az $n = 3$ esettel foglalkozunk. Az olvashatóság kedvéért legyen $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$. A bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\frac{bc}{a+1} + \frac{ac}{b+1} + \frac{ab}{c+1} \leq \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\frac{bc}{a+1} = bc - \frac{abc}{a+1}; \qquad \frac{ac}{b+1} = ac - \frac{abc}{b+1} \quad \text{és} \quad \frac{ab}{c+1} = ab - \frac{abc}{c+1},$$

rendezzük át (1)-et a következőképpen:

$$bc + ac + ab \leq \frac{1}{4} + abc\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right).$$

Írjuk fel a számtani és a harmonikus közép közti egyenlőtlenséget az $\dfrac{1}{a+1}$, $\dfrac{1}{b+1}$,$\dfrac{1}{c+1}$ számokra:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq 3\frac{3}{(a+1)+(b+1)+(c+1)} = \frac{9}{a+b+c+3} = \frac{9}{4}.$$

Elég emiatt azt bizonyítani, hogy

$$bc + ac + ab \leq \frac{1}{4} + abc\,\frac{9}{4}.$$

Mivel az egyenlőtlenség szimmetrikus $a,\ b,\ c$-re, feltehetjük, hogy $a,\ b,\ c,$ közül c az (egyik) legkisebb; ekkor $c \leq \dfrac{1}{3}$.

Írjuk a helyére $(1-b-c)$-t és rendezzük az egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$bc + (1-b-c)c + (1-b-c)b \leq \frac{1}{4} + \frac{9}{4}(1-b-c)bc,$$

$$0 \leq 4b^2 - 9b^2c - 9bc^2 + 13bc - 4b + 4c^2 - 4c + 1,$$

$$0 \leq (4-9c)b^2 - (9c^2 - 13c + 4)b + (4c^2 - 4c + 1). \tag{2}$$

Tekintsük most a $p(x) = (4-9c)x^2 - (9c^2 - 13c + 4)x + (4c^2 - 4c + 1)$ polinomot. Mivel $c \leq \dfrac{1}{3}$, a polinom főegyütthatója pozitív: $4 - 9c \geq 4 - 9 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$. Ha megmutatjuk, hogy a diszkrimináns nem pozitív; abból következik, hogy a polinom helyettesítési értékei nem lehetnek negatívak, ami $x = b$ esetén éppen a (2) egyenlőtlenség.

A diszkrimináns:

$$D = (9c^2 - 13c + 4)^2 - 4(4 - 9c)(4c^2 - 4c + 1) = 81c\left(c - \frac{1}{3}\right)^2\left(c - \frac{4}{9}\right).$$

Mivel $0 < c \le \frac{1}{3}$, azért $c - \frac{4}{9} < 0$, tehát $D \le 0$. Ezzel az állítást n = 3-ra is igazoltuk.

Az egyenlőséghez szükséges például, hogy az $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}$ számokra felírt számtani és harmonikus közép is egyenlő legyen; ez pedig csak $a = b = c$ esetén teljesül.

Ha $a = b = c = \frac{1}{3}$, akkor valóban egyenlőség áll fenn:

$$\frac{bc}{a+1} + \frac{ac}{b+1} + \frac{ab}{c+1} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4}.$$

Kassai Lóránt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. III. o. t.)