I. megoldás. Legyen $y = \sqrt[3]{x}$. Ezzel a helyettesítéssel az egyenletet a következő alakba írhatjuk át:

$$y + \sqrt[3]{9 - y^3} = 3.$$

Vonjunk ki mindkét oldalból y-t és emeljünk köbre, majd rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9 - y^3} &= 3 - y, \\ 9 - y^3 &= 27 - 27y + 9y^2 - y^3, \\ 9y^2 - 27y + 18 &= 0. \end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenletnek két gyöke van: $y_1 = 1$ és $y_2 = 2$. Ezekből $x_1 = y_1^3 = 1$ és $x_2 = y_2^3 = 8$ adódik. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

II. megoldás. Felhasználjuk az ismert $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ azonosságot. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9 - x}\right)^3 &= 3^3, \\ (\sqrt[3]{x})^3 + \left(\sqrt[3]{9 - x}\right)^3 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{9 - x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9 - x}) &= 27, \\ 9 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{9 - x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{9 - x}) &= 27. \qquad (2) \end{aligned}$$

A zárójelben éppen az egyenlet bal oldala áll, ennek helyére írjuk be az eredeti egyenlet jobb oldalán szereplő 3-at:

$$9 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{9 - x} \cdot 3 = 27.$$

Rendezve és köbre emelve:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{9 - x} &= 2, \\ x(9 - x) &= 8, \\ 0 &= x^2 - 9x + 8. \end{aligned}$$

A másodfokú egyenletnek két gyöke $x_l = 1$ és $x_2 = 8$, ezeket az eredeti egyenletbe behelyettesítve láthatjuk, hogy ezek valóban annak is gyökei.

Megjegyzés. Az első megoldásban csupa ekvivalens átalakítást végeztünk (az egyenlet köbreemelése, illetve a mindkét oldalból való köbgyökvonás ekvivalens átalakítás), ezért a megoldás végére ezt is írhatnánk: „Mivel csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, az 1 és 8 biztosan megoldások”. A második megoldásban azonban ez nem igaz! Abban a lépésben, amikor a (2) bal oldalán szereplő kifejezésben az egyenlet bal oldala helyett a jobb oldalt írtuk, olyan átalakítást végeztünk, amely nem fordítható meg. (Csak abban az esetben lehet megfordítani, ha előre tudnánk, hogy az egyenlet valamely értékre igaz.)

Azt, hogy ilyen átalakítás valóban eredményezhet hamis gyököket, a következő példa mutatja:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2 - x} = -1.$$

A II. megoldás lépéseivel

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2 - x})^3 &= -1, \\ (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{2 - x})^3 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2 - x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2 - x}) &= -1, \\ 2 + 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2 - x}(-1) &= -1, \\ \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2 - x} &= 1, \\ x(2 - x) &= 1, \\ 0 &= x^2 - 2x + 1, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Az egyenletnek viszont ez nem megoldása! (Az, hogy az egyenletnek nincs megoldása, eleve látható például abból, hogy a bal oldal biztosan pozitív: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2 - x} > \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{-x} = 0$.)

Akik a feladatot a II. megoldás módszerével oldották meg, de - tévesen - azt írták, hogy csupa ekvivalens átalakítást végeztek, 4 pontot kaptak.