Legyen az ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, egy ilyen téglalap egyik csúcsa $P(u;v)$. Először megmutatjuk, hogy a P pontok egy $\sqrt{a^2+b^2}$ sugarú körön helyezkednek el. A P ponton átmenő m iránytangensű egyenes és az ellipszis közös pontjainak koordinátáit az

$$\begin{aligned}&y=m(x-u)+v\\&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai adják:

$$b^2x^2+a^2(mx-mu+v)^2=a^2b^2,$$

azaz

$$\left(b^2+a^2m^2\right)x^2+2a^2m(v-mu)x+\left(a^2m^2u^2+a^2v^2-2a^2muv-a^2b^2\right)=0.$$

1993-04-161-1.eps

1. ábra

1993-04-161-2.eps

2. ábra

Az egyenes akkor lesz érintő, ha ennek az (x-ben másodfokú) egyenletnek a diszkriminánsa zérus, azaz:

$$\begin{aligned}0=\left[2a^2m(v-mu)\right]^2-4\left(b^2+a^2m^2\right)\left(a^2m^2u^2+a^2v^2-2a^2muv-a^2b^2\right)=\\=4a^2\cdot b^2\left[\left(a^2-u^2\right)m^2+2uvm+b^2-v^2\right].\end{aligned}$$

Ennek az (m-re másodfokú) egyenletnek a gyökei a P pontból húzható érintők iránytangesei. Mivel ezek az érintők merőlegesek, a gyökök szorzata -1 lesz, tehát $\frac{b^2-v^2}{a^2-u^2}=-1$ (ha $a^2\neq u^2$) vagyis $u^2+v^2=a^2+b^2$, amely már $a^2=u^2$ esetén is érvényes. Ez azt jelenti, hogy az érintő téglalap csúcsai rajta vannak az $x^2+y^2=a^2+b^2$ egyenletű körön.

Most már csak ki kell választanunk az ebbe a körbe írt téglalapok közül az ellipszist érintő legnagyobb és legkisebb kerületűt. Jelöljük két, a körbe írt téglalap oldalait az *2. ábra* szerint, ahol „a" a legkisebb oldal, továbbá $a<c$ és $b\le d$. Nyilván $(2r)^2=a^2+c^2=b^2+d^2$, és így $c^2-d^2=b^2-a^2$, azaz $c-d=\frac{b+a}{c+d}(b-a)$; tehát a feltételek szerint $c-d<b-a$. Így $2(a+c)<2(b+d)$, tehát annak a téglalapnak a kerülete a kisebb, amelyiknek kisebb a rövidebbik oldala. Mivel az ellipszis köré írt téglalapnak a kistengelynél kisebb oldala nem lehet, azért az a téglalap lesz a legkisebb kerületű, amelynek egyik oldala a kistengely, tehát oldalai párhuzamosak az ellipszis szimmetriatengelyeivel. A legnagyobb pedig akkor lesz a kerület, ha a téglalap négyzet, tehát ha a csúcsai az ellipszis szimmetriatengelyein helyezkednek el.

Tichler Krisztián (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján