Tegyük fel, hogy a pontok összekötése egymást nem keresztező szakaszokkal megtörtént. A kapott alakzatot úgy tekinthetjük, mint egy csupa háromszöglap határolta egyszerű poliédernek egyik lapjára való merőleges vetületét. Erre a poliéderre alkalmazható Euler tétele, amely szerint

$$c+l=e+2, \tag{1}$$

ahol c a csúcsok, l a lapok, e pedig az élek száma.

Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy minden csúcsból legalább 6 él indul ki. Mivel minden él két csúcsot köt össze, $2e \geq 6c$, azaz

$$\frac{e}{3} \geq c. \tag{2}$$

Tudjuk továbbá, hogy minden lap háromszög és egy-egy él két laphoz tartozik (feltéve, hogy nincs olyan él, amelynek valamely belső pontja is csúcs); ekkor $3l=2e$, amiből

$$l=\frac{2}{3}e. \tag{3}$$

(2) és (3) alapján (1)-ből azt kapjuk, hogy $\frac{e}{3}+\frac{2}{3}e \geq e+2$, azaz $e \geq e+2$, ami ellentmondás. Ezért nem lehetséges, hogy minden csúcsból legalább 6 él induljon ki, tehát igaz a feladat állítása.

1993-04-160-1.eps

Hátra van még az az eset, amikor van olyan él, amelynek egy belső pontja is csúcs. Ilyen esetet tüntet fel az *ábra*. Húzzuk meg ekkor az AB élt is, illetve az AB-hez hasonló szerepű éleket. Ezután alkalmazható az előbbi gondolatmenet, és most is következik a feladat állítása.