Tetszőleges y valós számra jelölje $||y||$ az y távolságát a hozzá legközelebbi páratlan egész számtól; ez az érték mindig 0 és 1 közé esik.

Először megmutatjuk, hogy tetszőleges y valós számra

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}y\right| \le 1-||y||^2. \tag{1}$$

Legyen az y-hoz legközelebbi páratlan szám $2k+1$. Ekkor $y=2k+1\pm||y||$ és a $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ azonosság alapján

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}y\right| = \left|\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2}||y||\right)\right| = \cos\frac{\pi}{2}||y|| = 1-2\sin^2\frac{\pi}{4}||y||.$$

1993-04-158-1.eps

A $[0,1]$ intervallumban az $x\mapsto\sin\frac{\pi}{4}x$ függvény konkáv, ezért grafikonja a $(0,0)$, $\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ végpontokat összekötő húr fölött van; így ebben az intervallumban $\sin\frac{\pi}{4}x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}x$. Ezt (2)-be írva kapjuk, hogy

$$1-2\sin^2\frac{\pi}{4}||y|| \le 1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}||y||\right)^2 = 1-||y||^2.$$

Másodszor azt bizonyítjuk be, hogy tetszőleges y valós számra

$$\max(||y||,||\sqrt{2}y||) \ge \frac{1}{(4+2\sqrt{2})|y|+3} \tag{3}$$

(ahol $\max(||b||,||\sqrt{2}y||)$ a két szám közül a nagyobbat jelöli).

Legyen $\alpha=\max(||y||,||\sqrt{2}y||)$; az y-hoz, illetve $\sqrt{2}y$-hoz legközelebbi páratlan szám p, illetve q; továbbá $\varepsilon=y-p$ és $\delta=\sqrt{2}y-q$; ekkor $|\varepsilon|=||y||\le\alpha$ és $|\delta|=||\sqrt{2}y||\le\alpha$. Az ε és δ definíciója alapján

$$y=p+\varepsilon \quad\text{és}\quad \sqrt{2}y=q+\delta.$$

Emeljük ezeket négyzetre, majd az első kétszereséből vonjuk ki a másodikat:

$$0=2(p+\varepsilon)^2-(q+\delta)^2=2(p^2+2p\varepsilon+\varepsilon^2)-(q^2+2q\delta+\delta^2).$$

Rendezzük át a következőképpen:

$$q^2-2p^2=4p\varepsilon+2\varepsilon^2-2q\delta-\delta^2=4y\varepsilon-2\varepsilon^2-2\sqrt{2}y\delta+\delta^2.$$

A bal oldalon egy páratlan egész szám áll (mivel q páratlan); figyelembe véve ezt, és hogy $\varepsilon^2\le|\varepsilon|\le\alpha$, $\delta^2\le|\delta|\le\alpha$, elvégezhetjük a következő becslést:

$$\begin{aligned}1\le|q^2-2p^2|&=|4y\varepsilon-2\varepsilon^2-2\sqrt{2}y\delta+\delta^2|\le|4y\varepsilon|+2\varepsilon^2+|2\sqrt{2}y\delta|+\delta^2\le\\&\le 4\alpha|y|+2\alpha+2\sqrt{2}\alpha|y|+\alpha=\alpha((4+2\sqrt{2})|y|+3).\end{aligned}$$

Ebből pedig (3) azonnal következik.

Az (1) és (3) becslések alapján nem nehéz bebizonyítani az állítást. Legyen $x=\frac{\pi}{2}y$, azaz $y=\frac{2}{\pi}x$. Ekkor

$$\begin{aligned}|\sin x+\sin\sqrt{2}x|&\le|\sin x|+|\sin\sqrt{2}x|=|\sin\frac{\pi}{2}y|+|\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{2}y|\le\\&\le\left(1-||y||^2\right)+\left(1-||\sqrt{2}y||^2\right)\le 2-(\max(||y||,||\sqrt{2}y||))^2\le\\&\le 2-\frac{1}{((4+2\sqrt{2})|y|+3)^2}<2-\frac{1}{(7|y|+3)^2}.\end{aligned}$$

Mivel $(7|y|+3)^2=98y^2+18-(7|y|-3)^2\le 98y^2+18$, ebből következik, hogy

$$|\sin x+\sin\sqrt{2}x|\le 2-\frac{1}{98y^2+18}=2-\frac{1}{98\left(\frac{2}{\pi}x\right)^2+18}=$$
$$2-\frac{1}{\dfrac{392}{\pi^2}x^2+18}<2-\frac{1}{40x^2+18}<2-\frac{1}{100(x^2+1)}.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata nyomán

Megjegyzések. 1. A nevezőben a 100-as együtthatót kisebbre (pl. 40-re) is ki lehet cserélni. A legnagyobb érték, amellyel az állítás *nem* igaz, körülbelül 7,8813. Ennél a kritikus értéknél már egyenlőség is fennállhat.

2. Feltehetnénk a következő kérdést is: ha c pozitív szám, akkor igaz-e, hogy

$$|\sin x+\sin\sqrt{2}x|<2-\frac{c}{x^2} \tag{4}$$

teljesül, ha x elég nagy, azaz létezik-e olyan x_0 szám, hogy tetszőleges x_0-nál nagyobb x-re (4) teljesül?

A megoldáshoz hasonló, de pontosabb számolással be lehet látni, hogy ez $c>\dfrac{\pi^4}{768}$ esetén igaz. Azt is be lehet bizonyítani, hogy $c\le\dfrac{\pi^4}{768}$ esetén pedig nem igaz, vagyis minden x_0 számhoz van olyan $x>x_0$ szám, amelyre (4) nem teljesül.