

Osszuk el az egyenletet 2-vel és írjunk $\frac{1}{2}$ helyére $\sin \frac{\pi}{6}$ -ot, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ helyére $\cos \frac{\pi}{6}$ -ot:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

A $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ azonosság alapján a bal oldalon $\sin(x + \frac{\pi}{6})$ áll, azaz

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ennek megoldásai: $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, azaz $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ és $x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi$, azaz $x = \frac{7\pi}{12} + 2l\pi$, ahol k, l tetszőleges egész számok.

Megjegyzések. 1. Az egyenletet meg lehet oldani úgy is, hogy a bal oldalról az egyik tagot, pl. $\cos x$ -et kifejezzük, négyzetreemelünk és $\cos^2 x$ helyére $(1 - \sin^2 x)$ -et írunk:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sqrt{2} - \sqrt{3} \sin x, \\ \cos^2 x &= (\sqrt{2} - \sqrt{3} \sin x)^2, \\ 1 - \sin^2 x &= 2 - 2\sqrt{6} \sin x + 3 \sin^2 x.\end{aligned}$$

Ezzel $\sin x$ -re másodfokú egyenletet kapunk, amit meg tudunk oldani.

Ennek a módszernek az a hátránya, hogy a négyzetre emelés során hamis gyökök is keletkezhetnek.

2. A megoldásban látotthoz hasonló módon meg lehet oldani minden

$$A \sin x + B \cos x = C$$

alakú egyenletet, ahol természetesen A és B nem lehet egyszerre 0.

Az egyenletet először úgy próbáljuk elosztani egy számmal, hogy a bal oldalon szereplő két együttható valamilyen számnak a koszinusza és szinusza legyen. Ez pontosan akkor teljesül, ha a két együttható négyzetösszege 1.

Könnyű ellenőrizni, hogy ez $\sqrt{A^2 + B^2}$ -tel való osztással elérhető:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Legyen α olyan szám, amelyre $\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ és $\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Ekkor az egyenlet így alakul:

$$\sin(x + \alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

ennek megoldásai:

$$x = \arcsin \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} + 2k\pi - \alpha$$

és

$$x = -\arcsin \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} + (2l + 1)\pi - \alpha,$$

ahol k, l tetszőleges egész számok.

Az egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $\left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \leq 1$, azaz $C^2 \leq A^2 + B^2$.