Ismeretes, hogy az egyenlő oldalú tetraéder befoglalható egy téglatestbe. Legyen ennek a téglatestnek a térfogata V. A tetraéder minden lapja egy $\frac{V}{6}$ térfogatú gúlát vág le a téglatestből, ezért a tetraéder térfogata $\frac{V}{3}$. A tetraéder térfogatát még úgy is megkaphatjuk, hogy csúcsait a beírt gömb középpontjával összekötve, összegezzük a keletkezett négy gúla térfogatát. Ha egy lap területe T, akkor

$$\frac{V}{3}=4\frac{Tr}{3}. \tag{1}$$

Legyenek a téglatest élei $x,\ y,\ z$, a lapátlók pedig $a,\ b,\ c$. A Pitagorasz-tétel szerint $x^2+y^2=a^2$; $x^2+z^2=b^2$; $y^2+z^2=c^2$. Ezekből

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}},\quad z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}. \tag{2}$$

(2) alapján a téglatest térfogata:

$$V=xyz=\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{8}},$$

amiből ((1)-et fölhasználva és mindkét oldalt abc-vel osztva);

$$\frac{4Tr}{abc}=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}, \tag{3}$$

majd beírva a háromszög területére vonatkozó $T=\frac{abc}{4R}$ képletet és a koszinusztételt, (3)-ból:

$$\frac{r}{R}=\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

azaz

$$r=R\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata nyomán

Megjegyzés. 1. Az olyan tetraédert, amelynek lapjai egybevágók, egyenlő oldalú tetraédernek nevezzük.

2. A (2) összefüggésekből láthatjuk, hogy az egyenlő oldalú tetraéder lapjai hegyesszögű háromszögek.

3. Legyen a tetraéder köré írható gömb sugara S. Bebizonyítható – lásd pl. *Reiman István*: A geometria és határterületei c. könyvének 248. oldalán –, hogy $3r\le S$. Ugyanezen könyv 89. oldalán azt is megtalálhatjuk, hogy az egyenlő oldalú tetraéder súlypontja, beírt- és körülírt gömbjének középpontja egybeesik. Utóbbi tétel könnyen belátható következménye, hogy $S=r^2+R^2$, amiből feladatunk állítása segítségével

$$S^2=R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+R^2,$$
$$S=R\sqrt{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Tehát a körülírt gömb sugara r-hez hasonlóan kifejezhető $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ és R segítségével.

1993-04-156-1.eps

Az előbb idézett tétel szerint

$$3R\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\ge R\sqrt{1+cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

amiből

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le\frac{1}{8}. \tag{4}$$

A (4) eredmény egy önmagában is fontos trigonometriai egyenlőtlenség, gondolatmenetünkből hegyesszögű háromszögekre következik, tompaszögű és derékszögű háromszögekre pedig nyilvánvalóan igaz.

4. Minden tetraéder befoglalható egy paralelepipedonba úgy, hogy a tetraéder élei a paralelepipedon lapátlói legyenek. Ezt belátandó, jelöljük az $ABCD$ tetraéder három, egy csúcsból kiinduló élére fektetett $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ vektort rendre $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$-vel. Olyan $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ vektorokat keresünk, amelyekre $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{a}$, $\mathbf{z}-\mathbf{y}=\mathbf{c}$, $\mathbf{x}+\mathbf{z}=\mathbf{b}$. Ezt az $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}$-re vonatkozó egyenletrendszert könnyen megoldhatjuk, és azt kapjuk, hogy a követelményeknek egyetlen vektorhármas (és egyetlen paralelepipedon) tesz eleget, éspedig

$$\mathbf{x}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}),\quad \mathbf{y}=\frac{1}{2}(-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}),\quad \mathbf{z}=\frac{1}{2}(-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$