Toljuk el az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszöget úgy, hogy A és A_2 képe A_1 legyen. Használjuk az *ábra* további jelöléseit. Az eltolás révén

$$A_1A = C'C \qquad \text{és} \qquad A_1A_2 = C_2'C_2. \tag{1}$$

1993-02-067-1.eps

Feltételeinkből következik, hogy $\dfrac{C_1C}{C_1C_2} = \dfrac{A_1A}{A_1A_2}$, ezért (1) alapján

$$\frac{C_1C}{C_1C_2} = \frac{C'C}{C_2'C}. \tag{2}$$

Az eltolások folytán a két ívvel jelölt szögek megegyeznek. Így a párhuzamos szelők tétele szerint a C_1CC' és $C_1C_2C_2'$ háromszögek hasonlóak. Ezért a C_1, C' és C_2' pontok egy egyenesen vannak, és

$$\frac{C_1C'}{C'C_2'} = \frac{C_1C}{CC_2}. \tag{3}$$

Ugyanígy megmutatható, hogy B_1, B' és B_2' is egy egyenesen van, és

$$\frac{B_1B'}{B'B_2'} = \frac{B_1B}{BB_2} = \frac{C_1C}{CC_2}. \tag{4}$$

Tekintsük most az A_1 középpontú α szögű $\dfrac{A_1C_1}{A_1B_1}$ arányú forgatva nyújtást. Ez a transzformáció a B_1 pontot a C_1-be, a B_2' pontot a C_2'-be viszi át. Mivel ez egy hasonlósági transzformáció, ezért a B_1B_2' szakasz B' osztópontját a C_1C_2' szakasz C' osztópontjába viszi át, hiszen (3) és (4) szerint a B' pont ugyanolyan arányban osztja az előbbi szakaszt, mint C' az utóbbit. Tehát $B'A_1C' \sphericalangle = \alpha$, és $\dfrac{A_1C'}{A_1B'} = \dfrac{A_1C_1}{A_1B_1}$, ami azt jelenti, hogy $A_1B'C'$ háromszög hasonló az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz; de akkor ugyanez áll fenn a vele egybevágó ABC háromszögre is.

Megjegyzés. A bizonyítás a komplex számok segítségével is elvégezhető, amint azt – többek között – *prof. Walter Janous* innsbrucki olvasónk is megjegyezte. Tekintsük e célból a sík egy tetszőlegesen választott pontjából az A_i, B_i, C_i pontokba mutató $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{b_i}$, $\mathbf{c_i}$ vektorokat komplex számoknak. A feladat feltételei szerint (valamely z komplex számmal)

$$\frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1} = \frac{\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2}{\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2} = z. \tag{5}$$

Az origóból az A, B, C pontokba mutató $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= t\mathbf{a}_1 + (1-t)\mathbf{a}_2,\\
\mathbf{b} &= t\mathbf{b}_1 + (1-t)\mathbf{b}_2,\\
\mathbf{c} &= t\mathbf{c}_1 + (1-t)\mathbf{c}_2,
\end{aligned}$$

ahol t valós szám. Így (5) figyelembevételével

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\mathbf{a}-\mathbf{c}} &= \frac{t(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + (1-t)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2)}{t(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) + (1-t)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2)} = \\
&= \frac{tz(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) + (1-t)z(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2)}{t(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) + (1-t)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2)} = z = \frac{\mathbf{a_i} - \mathbf{b_i}}{\mathbf{a_i} - \mathbf{c_i}},
\end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy ABC hasonló az A_i, B_i, C_i háromszögekhez.