A két függvény egymás inverze, ezért grafikonjaik tükrösek az $y = x$ egyenesre. Ha az $x \mapsto a^x$ függvénynek van pontja az $y = x$ egyenesen, akkor az a pont az $x \mapsto \log_a x$ függvény grafikonjának is pontja, és ekkor a keresett távolság zérus. Vizsgáljuk ezért az $f(x) = a^x - x$ függvényt. Ha az $x \mapsto a^x$ függvény grafikonjának van közös pontja az $y = x$ egyenessel, akkor $f(x)$ értékkészletében nem pozitív számok is előfordulnak. Az $f(x)$ függvény folytonos, és $f^{'}(x) = (a^x - x)^{'} = a^x \cdot \ln a - 1$ szigorúan monoton növekvő. Mivel $a^x \cdot \ln a - 1$ pontosan akkor 0, ha $x = \log_a \log_a e$, azért ezen a helyen $f(x)$-nek abszolút minimuma van. Itt a függvényérték:

$$a^{\log_a \log_a e} - \log_a \log_a e = \log_a e - \log_a \log_a e = \log_a \frac{e}{\log_a e}.$$

Ez a függvényérték pontosan akkor nem pozitív, ha $\dfrac{e}{\log_a e} \leqslant 1$, azaz $e \cdot \ln a \leqslant 1$, vagyis $a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$. Ebből láthatjuk, hogy a két függvény grafikonjának pontosan akkor nincs közös pontja, ha $a > e^{\frac{1}{e}}$.

A két grafikon egymáshoz legközelebb eső pontjai azok a pontok lesznek, amelyekhez tartozó érintők párhuzamosak az $y = x$ egyenessel. Képezzük ezért az $x \mapsto a^x$ függvény differenciálhányadosát: $(a^x)^{'} = a^x \cdot \ln a$. Ha az érintési pont az $(x_0; y_0)$ pont, akkor $a^{x_0} \cdot \ln a = 1$, amiből $x_0 = \dfrac{\ln \ln a}{\ln a}$ és $y_0 = \dfrac{1}{\ln a}$. Mivel az $x \mapsto \log_a x$ függvény grafikonján az érintési pont az $(x_0; y_0)$ pontnak az $y = x$ egyenesre való tükörképe $(y_0; x_0)$, a keresett távolság

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{\ln a} + \frac{\ln \ln a}{\ln a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ln a} + \frac{\ln a \ln a}{\ln a}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + \ln \ln a}{\ln a}.$$

Az elmondottakat összefoglalva, a két függvény grafikonjának legközelebbi pontjai között a távolság:

$$d = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}} \\ \sqrt{2}\dfrac{1 + \ln \ln a}{\ln a}, & \text{ha } a > e^{\frac{1}{e}}. \end{cases}$$