**I. megoldás**. Az állítást indirekt úton bizonyítjuk. Meghatározzuk a függvény gyökeit és megmutatjuk, hogy ezek nem lehetnek periodikus függvény gyökei.

Mivel a $\sin\ a+\sin\ b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ azonosság alapján

$$\sin x+\sin\sqrt{2}x=2\sin\frac{\sqrt{2}+1}{2}x\cdot\cos\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ x,$$

a függvény értéke pontosan akkor 0, ha $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\ x=k\pi$, azaz $x=\dfrac{2k\pi}{\sqrt{2}+1}$, és $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ x=(2l+1)\dfrac{\pi}{2}$, azaz $x=\dfrac{(2l+1)\pi}{\sqrt{2}-1}$, ahol $k$ illetve $l$ egész számok. A gyököket tehát egy $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}+1}$ és egy $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}-1}$ különbségű, mindkét irányban végtelen számtani sorozat tartalmazza.

Tegyük fel, hogy a függvény periodikus, és legyen a $p$ pozitív szám egy periódus.

Először megjegyezzük, hogy egy periódusban mindkét számtani sorozatnak csak véges sok eleme van, ezért egy perióduson belül csak véges sok gyök van.

Rendeljük hozzá minden egyes gyökhöz azt a $[0,p)$ intervallumbeli gyököt, amit úgy kapunk, hogy $p$ valamilyen egész többszörösét adjuk hozzá (azaz az $x_0$ gyökhöz az $x_0-\left[\dfrac{x_0}{p}\right]\cdot p$ számot, ami szintén gyök). Mivel $\dfrac{2k\pi}{\sqrt{2}+1}$ alakú gyökből végtelen sok van, kell köztük lenni kettőnek, amelyekhez ugyanazt rendeltük: $\dfrac{2k_1\pi}{\sqrt{2}+1}$ és $\dfrac{2k_2\pi}{\sqrt{2}+1}$, ahol $k_1$ és $k_2$ különböző egész számok. Az, hogy ugyanazt rendeltük hozzájuk, azt jelenti, hogy a különbségük $p$ többszöröse:

$$\frac{2k_1\pi}{\sqrt{2}+1}-\frac{2k_2\pi}{\sqrt{2}+1}=\frac{2(k_1-k_2)\pi}{\sqrt{2}+1}=mp, \tag{1}$$

ahol $m$ egész szám , és $m\neq 0$.

Hasonlóan gondolhatjuk meg, hogy a $\dfrac{(2l+1)\pi}{\sqrt{2}-1}$ alakú gyökök között is van kettő: $\dfrac{(2l_1+1)\pi}{\sqrt{2}-1}$ és $\dfrac{(2l_2+1)\pi}{\sqrt{2}-1}$, amelyek különbsége $p$ többszöröse:

$$\frac{(2l_1+1)\pi}{\sqrt{2}-1}-\frac{(2l_2+1)\pi}{\sqrt{2}-1}=\frac{2(l_1-l_2)\pi}{\sqrt{2}-1}=np, \tag{2}$$

ahol $n$ egész szám.

Osszuk el (1)-et (2)-vel:

$$\frac{k_1-k_2}{l_1-l_2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{m}{n},$$

vagy átrendezve:

$$\frac{k_1-k_2}{l_1-l_2}\cdot\frac{n}{m}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}.$$

Ez azonban ellentmondás, mert a bal oldalon racionális, a jobb oldalon pedig irracionális szám áll.

A függvény tehát nem periodikus.

**II. megoldás.** Tekintsük a függvény deriváltját:

$$(\sin x+\sin\sqrt{2}x)'=cos\ x+\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x.$$

Ha a függvény periodikus lenne, akkor a deriváltja is periodikus lenne. Elég tehát azt igazolni, hogy a derivált nem periodikus.

A derivált értéke a 0-ban $1+\sqrt{2}$. Megmutatjuk, hogy ezt az értéket sehol máshol nem veszi fel; ebből azonnal következik, hogy nem periodikus.

Ahol a derivált értéke $1+\sqrt{2}$, ott szükséges, hogy $\cos x=1$ és $\cos\sqrt{2}x=1$ legyen, másképp a függvényérték kisebb lenne. Ez pedig csak $x=2k\pi$ és $\sqrt{2}x=2l\pi$ esetén teljesül, ahol $k$ és $l$ egész számok. Ha $k$ nem 0, akkor ebből $\sqrt{2}=\dfrac{l}{k}$, ami ellentmond annak, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

Ezzel az állítást igazoltuk.