Megmutatjuk, hogy létezik olyan megoldás, amelyben x^a és y^b ugyanaz a 2-hatvány. Ehhez a következő egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$x^a = 2^k, \qquad y^b = 2^k, \qquad z^c = 2^{k+1}, \qquad \text{azaz}$$
$$x = 2^{\frac{k}{a}}, \qquad y = 2^{\frac{k}{b}}, \qquad z = 2^{\frac{k+1}{c}}.$$

Ha létezik ilyen k természetes szám, amelyre $\dfrac{k}{a}$, $\dfrac{k}{b}$ és $\dfrac{k+1}{c}$ egyszerre egész, készen vagyunk.

Mivel c relatív prím a-hoz és b-hez, relatív prím ab-hez is. Ebből pedig következik, hogy léteznek olyan p, q pozitív egészek, amelyekre $p \cdot c - q \cdot ab = 1$. Legyen $k = q \cdot ab = pc - 1$; ekkor $\dfrac{k}{a} = qb$, $\dfrac{k}{b} = qa$ és $\dfrac{k+1}{c} = p$ egyszerre pozitív egészek. Ezzel az állítást igazoltuk.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A megoldás kicsit általánosabban is megfogalmazható. Legyenek x_0 és y_0 pozitív egészek, és

$$x_0^a + y_0^b = z_0.$$

Legyen k olyan pozitív egész, amelyre $\dfrac{k}{a}$, $\dfrac{k}{b}$ és $\dfrac{k+a}{c}$ egészek. Az előbbi egyenlőséget z_0^k-val megszorozva:

$$x_0^a z_0^k + y_0^b z_0^k = z_0^{k+1}, \qquad \text{azaz}$$
$$\left(x_0 z_0^{\frac{k}{a}}\right)^a + \left(y_0 z_0^{\frac{k}{b}}\right)^b = \left(z_0^{\frac{k+1}{c}}\right)^c,$$

tehát $x = x_0 z_0^{\frac{k}{a}}$, $y = y_0 z_0^{\frac{k}{b}}$, $z = z_0^{\frac{k+1}{c}}$ pozitív egészekből álló megoldás (Szeidl Ádám megoldásában $x_0 = y_0 = 1$ volt).