Az $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ függvényre $f(1)=1$, és tetszőleges x, y egész számokra

$$f(x+y)(f(x)-f(y))=f(x-y)(f(x)+f(y)). \tag{1}$$

Határozzuk meg f-et.

Megoldás. Helyettesítsük be az $x=y=1$ értéket:

$$f(2)(f(1)-f(1))=f(0)(f(1)+f(1)),\quad \text{azaz}\quad f(0)=0.$$

Helyettesítsük be az $x=0$, $y=t$ számpárt, ahol t tetszőleges egész szám:

$$f(0+t)(f(0)-f(t))=f(0-t)(f(0)+f(t)) \qquad \text{és így}$$
$$0=f(t)(f(t)+f(-t)).$$

Ha $f(t)\neq 0$, akkor $f(-t)=-f(t)$. Ha $f(t)=0$, akkor az $x=0$, $y=-t$ helyettesítéssel:

$$0=f(-t)(f(t)+f(-t))=f^2(-t)$$

adódik, amiből $f(-t)$ is 0. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges t-re

$$f(-t)=-f(t),$$

vagyis f páratlan függvény.

Helyettesítsünk be most $x=2$, $y=1$-et

$$(f(3)(f(2)-f(1))=f(1)(f(2)+f(1)).$$

Az $f(1)=1$-et figyelembe véve, és rendezve:

$$(f(3)-1)(f(2)-1)=2.$$

Ez négyféleképpen lehetséges:

a) $f(2)=2$, $f(3)=3$;
b) $f(2)=3$, $f(3)=2$;
c) $f(2)=0$, $f(3)=-1$;
d) $f(2)=-1$, $f(3)=0$.

Az esetek vizsgálata során többször fel fogjuk használni azt az összefüggést, amit az $x=t$, $y=1$ helyettesítéssel nyerünk (1)-ből:

$$f(t+1)(f(t)-f(1))=f(t-1)(f(t)+f(1)),\quad \text{azaz}$$
$$f(t+1)(f(t)-1)=f(t-1)(f(t)+1).$$

Ebből

$$f(t+1)=\frac{f(t-1)(f(t)+1)}{f(t)-1},\quad \text{ha}\quad f(t)\neq 1. \tag{2}$$

a) Bebizonyítjuk, hogy $f(t)=t$ minden t egész számra. Ezt f páratlansága miatt elég nemnegatív t értékekre igazolni. Az eddigiek alapján ez $t=0$, 1, 2, 3-ra igaz; ha pedig $f(t)=t$, $f(t-1)=t-1$ és $t\geq 2$, akkor (2) alapján $f(t+1)=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t-1}=t+1$.

Az $f(t)=t$ függvény valóban megoldás, mert tetszőleges (x,y)-ra (1) mindkét oldalán $(x-y)(x+y)$ áll.

b) A (2) összefüggés alapján

$$f(4)=\frac{f(2)(f(3)+1)}{f(3)-1}=\frac{3\cdot(2+1)}{2-1}=9\ \text{ és így}$$
$$f(5)=\frac{f(3)(f(4)+1)}{f(4)-1}=\frac{2\cdot(9+1)}{9-1}=\frac{5}{2}.$$

Mivel ez nem egész szám, ez az eset nem lehetséges.

c) Megmutatjuk, hogy ebben az esetben tetszőleges k egész számra

$$f(4k)=0;$$
$$f(4k+1)=1;$$
$$f(4k+2)=0;$$
$$f(4k+3)=-1.$$

A páratlanság miatt elég ezt nemnegatív k értékekre igazolni.

Az állítás $k = 0$-ra igaz: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$. Tegyük fel, hogy igaz $k = k_0$-ra. Ekkor (2) alapján

$$f(4k_0+4) = \frac{f(4k_0+2)(f(4k_0+3)+1)}{f(4k_0+3)-1} = \frac{0\cdot(-1+1)}{-1-1} = 0;$$
$$f(4k_0+5) = \frac{f(4k_0+3)(f(4k_0+4)+1)}{f(4k_0+4)-1} = \frac{(-1)\cdot(0+1)}{0-1} = 1;$$

Helyettesítsünk be (1)-be $x = 4k_0 + 5$, $y = 2$-t:

$$f(4k_0+7)(f(4k_0+5)-f(2)) = f(4k_0+3)(f(4k_0+5)+f(2));$$
$$f(4k_0+7)(1-0) = (-1)\cdot(1+0),$$

vagyis $f(4k_0 + 7) = -1$.

Most helyettesítsünk be $x = 4k_0 + 6$, $y = 1$-et:

$$f(4k_0+7)(f(4k_0+6)-f(1)) = f(4k_0+5)(f(4k_0+6)+f(1))$$
$$(-1)(f(4k_0+6)-1) = 1\cdot(f(4k_0+6)+1).$$

Ebből azt kapjuk, hogy $f(4k_0 + 6) = 0$.

Ezzel az állításunkat igazoltuk.

Az f függvény megoldása a feladatnak. Ennek bizonyítása a következő táblázatban összefoglalt 16 eset vizsgálatával történhet (a táblázatban az (1) függvényegyenlet két oldala olvasható le az egyes esetekben):

	$x = 4k$	$x = 4k+1$	$x = 4k+2$	$x = 4k+3$
$y = 4l$	$0\cdot(0-0) =$ $= 0\cdot(0+0)$	$1\cdot(1-0) =$ $= 1\cdot(1+0)$	$0\cdot(0-0) =$ $= 0\cdot(0+0)$	$(-1)\cdot(-1-0) =$ $= (-1)(-1+0)$
$y = 4l+1$	$1\cdot(0-1) =$ $= (-1)\cdot(0+1)$	$0\cdot(1-1) =$ $= 0\cdot(1+1)$	$(-1)\cdot(0-1) =$ $= 1\cdot(0+1)$	$0\cdot(-1-1) =$ $= 0\cdot(-1+1)$
$y = 4l+2$	$0\cdot(0-0) =$ $= 0\cdot(0+0) =$	$(-1)\cdot(1-0) =$ $(-1)\cdot(1+0)$	$0\cdot(0-0) =$ $= 0\cdot(0+0)$	$1\cdot(-1-0) =$ $= 1\cdot(-1+0)$
$y = 4l+3$	$(-1)\cdot(0-(-1)) =$ $= 1\cdot(0+(-1))$	$0\cdot(1-(-1)) =$ $= 0\cdot(1+(-1))$	$1\cdot(0-(-1)) =$ $= (-1)\cdot(0+(-1))$	$0\cdot(-1-(-1)) =$ $= 0\cdot(-1+(-1))$

Az (1) egyenlet mind a 16 esetben teljesül.

d) Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges k egész számra

$$f(3k) = 0;$$
$$f(3k+1) = 1;$$
$$f(3k+2) = -1;$$

A páratlanság miatt ezt is elég nemnegatív k értékekre igazolni. A $k = 0$ esetben az állítás igaz; tegyük fel, hogy igaz $k = k_0$-ra. Ekkor (2) alapján

$$f(3k_0+3) = \frac{f(3k_0+1)(f(3k_0+2)+1)}{f(3k_0+2)-1} = \frac{1\cdot((-1)+1)}{(-1)-1} = 0 \quad \text{és}$$
$$f(3k_0+4) = \frac{f(3k_0+2)(f(3k_0+3)+1)}{f(3k_0+3)-1} = \frac{(-1)\cdot(0+1)}{0-1} = 1.$$

Helyettesítsünk be (1)-be $x = 3k_0 + 4$, $y = 2$-t:

$$f(3k_0+6)(f(3k_0+4)-f(2)) = f(3k_0+2)(f(3k_0+4)+f(2)),$$
$$f(3k_0+6)(1-(-1)) = (-1)(1+(-1)), \quad \text{amiből} \quad f(3k_0+6) = 0.$$

Most helyettesítsünk be $x = 3k_0 + 5$, $y = 1$-et:

$$f(3k_0+6)(f(3k_0+5)-f(1)) = f(3k_0+4)(f(3k_0+5)+f(1)),$$
$$0\cdot(f(3k_0+5)-1) = 1\cdot(f(3k_0+5)+1), \quad \text{amiből} \quad f(3k_0+5) = -1.$$

Ezzel igazoltuk az állítást $k = k_0 + 1$-re is.

Az f függvény megfelelő. A 9 esetet a c) esetekhez hasonlóan vizsgáljuk végig:

	$x=3k$	$x=3k+1$	$x=3k+2$
$y=3l$	$0\cdot(0-0)=$ $=0\cdot(0+0)$	$1\cdot(1-0)=$ $=1\cdot(1+0)$	$(-1)\cdot(-1-0)=$ $=(-1)\cdot(-1+0)$
$y=3l+1$	$1\cdot(0-1)=$ $=(-1)\cdot(0+1)$	$(-1)\cdot(1-1)=$ $=0\cdot(1+1)$	$0\cdot(-1-1)=$ $=1\cdot(-1+1)$
$y=3l+2$	$(-1)\cdot(0-(-1))=$ $=1\cdot(0+(-1))$	$0\cdot(1-(-1))=$ $=(-1)\cdot(1+(-1))$	$1\cdot(-1-(-1))=$ $=0\cdot(-1+(-1))$

Az (1) függvényegyenletnek tehát három függvény tesz eleget: az $f_1(x)=x$, az

$$f_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x=2k \\ 1, & \text{ha } x=4k+1 \\ -1, & \text{ha } x=4k+3 \end{cases}$$

és az

$$f_3(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x=3k \\ 1, & \text{ha } x=3k+1 \\ -1, & \text{ha } x=3k+2 \end{cases}$$

függvény.