Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n=1$, akkor az állítás igaz, és a bal oldalon egyenlőség áll:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2n)} \le \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2} < \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)-\frac{3}{4}}.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n=k$-ra. Ahhoz, hogy $n=k+1$-re is igaz legyen elégséges, ha

(2)
$$\begin{gathered}\frac{k+1}{(x+1)(x+2(k+1))}-\frac{k}{(x+1)(x+2k)} < \frac{1}{x+2k+1}-\frac{1}{x+2k+2} < \\ < \frac{k+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+2(k+1)+\frac{1}{2}\right)}-\frac{k}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+2k+\frac{1}{2}\right)},\end{gathered}$$

hiszen ennyivel változnak meg az (1)-ben szereplő mennyiségek.

(2)-ben először a bal oldali egyenlőtlenséget igazoljuk:

$$\begin{aligned}&\frac{k+1}{(x+1)(x+2(k+1))}-\frac{k}{(x+1)(x+2k)} = \frac{(k+1)(x+2k)-k(x+2k+2)}{(x+1)(x+2k)(x+2k+2)} = \\ &= \frac{x}{(x+1)(x+2k)(x+2k+2)} = \frac{x(x+2k+1)}{(x+1)(x+2k)}\cdot\frac{1}{(x+2k+1)(x+2k+2)} = \\ &= \frac{x^2+(2k+1)x}{x^2+(2k+1)x+2k}\cdot\left(\frac{1}{x+2k+1}-\frac{1}{x+2k+2}\right) < \frac{1}{x+2k+1}-\frac{1}{x+2k+2}.\end{aligned}$$

A jobb oldali egyenlőtlenség:

$$\begin{gathered}\frac{k+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+2(k+1)+\frac{1}{2}\right)}-\frac{k}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+2k+\frac{1}{2}\right)} = \\ = \frac{(k+1)\left(x+2k+\frac{1}{2}\right)-k\left(x+2k+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+2k+\frac{1}{2}\right)\left(x+2k+\frac{5}{2}\right)} = \\ = \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+2k+\frac{1}{2}\right)\left(x+2k+\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{\left(x+2k+\frac{1}{2}\right)\left(x+2k+\frac{5}{2}\right)} = \\ = \frac{1}{x^2+(4k+3)x+\left(4k^2+6k+\frac{5}{4}\right)} > \frac{1}{x^2+(4k+3)x+(4k^2+6k+2)} = \\ = \frac{1}{(x+2k+1)(x+2k+2)} = \frac{1}{x+2k+1}-\frac{1}{x+2k+2}.\end{gathered}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Párniczky Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján