A feladat a) részének bizonyításához tegyük fel, hogy (x, y, z) megoldás; eszerint

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz + 1.$$

Azt kell belátni, hogy $(2z - x,\ x - y,\ y - z)$ is megoldás, azaz

$$(2z - x)^3 + 2(x - y)^3 + 4(y - z)^3 = 6(2z - x)(x - y)(y - z) + 1.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, és rendezve:

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 + 6(-x^2y + x^2z + xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z + 2yz^2) =$$

$$= 6(-x^2y + x^2z + xy^2 - 2xz^2 - 2y^2z + 2yz^2) + 6xyz + 1.$$

Elhagyva az egymással egyenlő tagokat a két oldalon, az

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz + 1$$

egyenlőséghez jutunk, amely feltevésünk értelmében teljesül. Ezzel az a) állítást beláttuk.

Lépéseink megfordíthatók, tehát a fentieken túl az is igaz, hogy ha (a, b, c) megoldás, akkor $(x, y, z) = (a + 2b + 2c,\ a + b + 2c,\ a + b + c)$ is megoldás.

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy az $(1, 1, 1)$ számhármas megoldása az egyenletnek. Ebből konstruálunk végtelen sok, pozitív egészekből álló megoldást.

Legyen $(a_0, b_0, c_0) = (1, 1, 1)$ és n ≥ 0 esetén

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = (a_n + 2b_n + 2c_n, a_n + b_n + 2c_n, a_n + b_n + c_n).$$

Az előbbiek alapján ezek megoldások.

A számhármasok valóban pozitív egészekből állnak, mert $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ pozitív egészek, másrészt ha a_n, b_n, c_n pozitív egészek, akkor a definícióbeli összegek szerint $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ is pozitív egészek.

Látható, hogy minden $n \geq 0$-ra $a_{n+1} = a_n + 2b_n + 2c_n > a_n$, vagyis az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozat szigorúan monoton nő. Ebből következik, hogy az (a_n, b_n, c_n) hármasok mind különbözőek.

Ezzel a feladat b) részét is igazoltuk.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések 1. Az $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz$ számot az $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ szám normájának nevezik a Q$(\sqrt[3]{2})$ testben (ez a $p + q\sqrt[3]{2} + r\sqrt[3]{4}$ alakú számokból áll, ahol p, q, r racionális). Az $(x, y, z) \mapsto (2z - x, x - y, y - z)$ hozzárendelés pedig megfelel a $(\sqrt[3]{2} - 1)$-gyel való szorzásnak. Az állítás első fele tehát azt mondja ki, hogy ha $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ normája 1, akkor $(\sqrt[3]{2} - 1)(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4})$ normája is 1.

Be lehet bizonyítani, hogy a norma multiplikatív (azaz szorzat normája a tényezők normáinak szorzata). Ebből – mivel $(\sqrt[3]{2} - 1)$ normája is 1 –, az állítás első fele azonnal következik.

2. A második részben konstruált megoldássorozat az $(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^n$ együtthatóiból áll:

$$a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4} = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^{n+1}.$$

3. Ha a megoldásokat nem „visszafelé" definiáltuk volna, hanem az eredeti irányban az

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = (2c_n - a_n, a_n - b_n, b_n - c_n)$$

rekurzióval, akkor

$$a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2} - 1)^{n-1}$$

lenne. Mivel ez 0 és 1 közé esik, az a_n, b_n, c_n számok között egyaránt szerepelnie kellene pozitívnak és negatívnak is.

4. Bebizonyítjuk, hogy az egyenletnek minden egész x, y, z megoldásához van olyan n egész szám, amelyre

$$x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^n.$$

Ehhez fel fogunk használni egy egyszerű azonosságot (ami valójában a norma definíciója).

Legyen ε az egyik, az 1-től különböző komplex harmadik egységgyök. Ekkor

$$(1)\qquad \begin{aligned}&(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4})(x + y\varepsilon\sqrt[3]{2} + z\varepsilon^2\sqrt[3]{4})(x + y\varepsilon^2\sqrt[3]{2} + z\varepsilon\sqrt[3]{4}) =\\ &= x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz.\end{aligned}$$

(Az azonosság a műveletek elvégzésével könnyen ellenőrizhető.)

Tegyük fel, hogy (x, y, z) megoldás, azaz $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ normája 1. Először is megmutatjuk, hogy $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ pozitív. Valóban, (1) alapján

$$x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} = \frac{x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz}{(x + y\varepsilon\sqrt[3]{2} + z\varepsilon^2\sqrt[3]{4})(x + y\varepsilon^2\sqrt[3]{2} + z\varepsilon\sqrt[3]{4})} = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{|x + y\varepsilon\sqrt[3]{2} + z\varepsilon^2\sqrt[3]{4}|^2},$$

ami pozitív. Külön is kiemelendő, hogy

$$|x + y\varepsilon\sqrt[3]{2} + z\varepsilon^2\sqrt[3]{4}| = |x + y\varepsilon^2\sqrt[3]{2} + z\varepsilon\sqrt[3]{4}| = \frac{1}{\sqrt{x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}}}. \tag{3}$$

Tegyük most fel, hogy x_0, y_0, z_0 olyan megoldás, amelyre $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ nem $(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^n$ alakú, azaz valamilyen n-re

$$(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^n < x_0 + y_0\sqrt[3]{2} + z_0\sqrt[3]{4} < (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^{n+1}.$$

Ha ezt beszorozzuk $(\sqrt[3]{2} - 1)^n = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^{-n}$-nel, olyan (x, y, z) megoldást kapunk, amelyre

$$1 < x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} < 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}. \tag{4}$$

Legyen $A = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, $B = z + y\varepsilon\sqrt[3]{2} + z\varepsilon^2\sqrt[3]{4}$ és $C = x + y\varepsilon^2\sqrt[3]{2} + z\varepsilon\sqrt[3]{4}$; (3) és (4) alapján

$$1 < A < 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}; \qquad \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} < |B| = |C| < 1. \tag{5}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$x = \frac{A + B + C}{3}; \qquad y = \frac{A + \varepsilon^2 B + \varepsilon C}{3\sqrt[3]{2}}; \qquad z = \frac{A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C}{3\sqrt[3]{4}}. \tag{6}$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{A - |B| - |C|}{3} \le x \le \frac{A + |B| + |C|}{3},$$

amiből (5) alapján

$$-1 < \frac{1 - 2\cdot 1}{3} < x < \frac{(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + 2\cdot 1}{3} < 2,$$

hasonlóan

$$\frac{A - |B| - |C|}{3\sqrt[3]{2}} \le y \le \frac{A + |B| + |C|}{3\sqrt[3]{2}},$$

amiből

$$-1 < \frac{1 - 2\cdot 1}{3\sqrt[3]{2}} < y < \frac{(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + 2\cdot 1}{3\sqrt[3]{2}} < 2,$$

végül

$$\frac{A - |B| - |C|}{3\sqrt[3]{4}} \le z \le \frac{A + |B| + |C|}{3\sqrt[3]{4}},$$

amiből

$$-1 < \frac{1 - 2\cdot 1}{3\sqrt[3]{4}} < z < \frac{1 + 2\cdot 1}{3\sqrt[3]{4}} < 2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy x, y, és z is csak 0 vagy 1 lehet. E nyolc lehetőség közül csak az $x = 1$, $y = z = 0$, illetve $x = y = z = 1$ esetben kapunk megoldást, de ezekre nem teljesül a (4) feltétel. Ellentmondásra jutottunk, vagyis igazoltuk, hogy minden egész megoldásra $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^n$ alakú.

5. Az $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ felírás egyértelmű, azaz ha $x_1 + y_1\sqrt[3]{2} + z_1\sqrt[3]{4} = x_2 + y_2\sqrt[3]{2} + z_2\sqrt[3]{4}$, és x_i, y_i, z_i egészek, akkor $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Legyen $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, $z = z_1 - z_2$; ekkor $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} = 0$, és így az (1) azonosság alapján

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0. \tag{7}$$

Megmutatjuk, hogy (7) csak $x = y = z = 0$ esetén teljesül.

Tegyük fel, hogy x, y, z nem mind 0. Legyen (x_0, y_0, z_0) egy ilyen, (7)-nek eleget tevő számhármas, amelyre $|x_0| = |y_0| + |z_0|$ (ami pozitív) minimális.

Mivel $x_0^3 = -2(y_0^3 + 2z_0^3 - 3x_0y_0z_0)$, x_0 nyilván páros. Legyen $x_0 = 2a$; ekkor

$$8a^3 + 2y_0^3 + 4z_0^3 - 12ay_0z_0 = 0, \qquad y_0^3 = -2(2a^3 + z_0^3 - 3ay_0z_0),$$

amiből következik, hogy y_0 is páros; legyen $y_0 + 2b$. Ezt behelyettesítve:

$$8a^3 + 16b^3 + 4z_0^3 - 24abz_0 = 0, \qquad z_0^3 = -2(a^3 + 2b^3 - 3abz_0).$$

Ebből következik, hogy z_0 is páros; legyen $z_0 = 2c$.

Az $a,\ b,\ c$ számokra teljesül, hogy

$$8a^3 + 16b^3 + 32c^3 - 48abc = 0, \qquad \text{azaz} \qquad a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc = 0,$$

tehát az (a, b, c) számhármas is ellenpélda; viszont $|a| + |b| + |c| = \dfrac{|x_0| + |y_0| + |z_0|}{2} < |x_0| + |y_0| + |z_0|$, ami ellentmond a minimalitás feltevésének.

Ezzel a kívánt egyértelműséget is igazoltuk.