Tegyük fel, hogy András $k$-szor veszi ki és teszi be a pénzét a bankba az év folyamán. Legyen a közben eltelt időszakok hossza években kifejezve $h_0, h_1, h_2 \dots, h_k$ (tehát $h_0$ az első alkalomig, $h_i$ az $i = 1,\ 2,\ \dots,\ k-1$ esetén az $i$-edik és $(i+1)$-edik alkalom között, $h_k$ a $k$-adik kivétel és visszatétel után eltelt idő). Mivel közben pontosan 1 év telik el, $h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_k = 1$.

A bank szabályai szerint $h$ idő alatt a számlán levő pénz az $(1+h)$-szorosára növekszik, tehát Andrásnak az év végén

$$100 \cdot (1+h_0)(1+h_1)\dots(1+h_k)$$

forintja lesz. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$(1+h_0)(1+h_1)\dots(1+h_k) \le \left(\frac{(1+h_0)+(1+h_1)+\dots+(1+h_k)}{k+1}\right)^{k+1} =$$
$$= \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Ismeretes, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton nő, és a határértéke $e = 2{,}71828 < 2{,}72$; a sorozat tagjai a monotonitás miatt kisebbek mint $e$, ezért

$$100(1+h_0)(1+h_1)\dots(1+h_k) \le 100\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < 100e < 272.$$

Ezzel az állítás első felét bebizonyítottuk.

Az idézett tétel szerint az is igaz, hogy ha $n$ elég nagy, akkor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2{,}71$. Ha $n$ ilyen, $k = n-1$ és $h_0 = h_1 = \dots = h_k = \frac{1}{n}$, akkor $100(1+h_0)\dots(1+h_k) = 100\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 100 \cdot 2{,}71 = 271$. Ezzel az állítás második felét is igazoltuk.

*Győry Máté* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn. III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Az állítás első fele az ismert $1 + x \le e^x$ egyenlőtlenség segítségével is igazolható:

$$100 \cdot (1+h_0)(1+h_1)\dots(1+h_k) \le 100 \cdot e^{h_0} \cdot e^{h_1} \dots e^{h_k} = 100 \cdot e^{h_0+\dots+h_k} = 100 \cdot e.$$

2. A második részben a legkisebb megfelelő $n$ a 164, vagyis $k = 163$. Ez azt jelenti, hogy ha András minden második nap megújítja a bankszámláját (és ha a bank a tört filléreket is figyelembe veszi!), akkor az év végén 271 forintnál több pénze lesz.