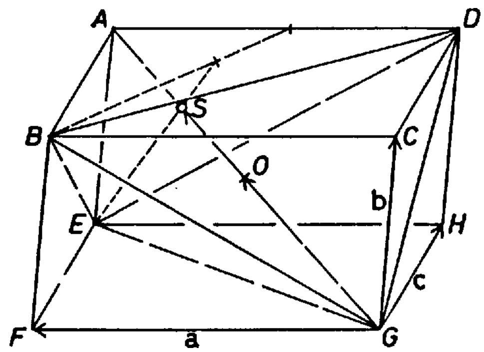
Használjuk az *ábra* jelöléseit. Ismeretes, hogy minden paralelepipedonba két tetraédert lehet írni, amelyek a paralelepipedon O középpontjára tükrösek, és bármelyiknek a térfogata a paralelepipedonénak $\frac{1}{3}$ része.



Látni fogjuk, hogy a feladat megoldása szempontjából mindegy, hogy melyik tetraédert választjuk. Az ábrán a $BEGD$ tetraédert rajzoltuk meg. Belátjuk, hogy ennek térfogata a paralelepipedon térfogatának $\frac{1}{3}$-a. Mivel pl. az $ABDE$ levágott tetraéder ABD lapjának területe a paralelepipedon $ABCD$ lapja területének a fele, az ezekhez a lapokhoz tartozó magasság pedig ugyanaz, ezért egy levágott tetraéder térfogata a paralelepipedon térfogatának $\frac{1}{6}$ része. A négy levágott tetraéder térfogatának összege $4 \cdot \frac{1}{6}$, így a beírt tetraéder köbtartalma valóban $\frac{1}{3}$-a a paralelepipedon térfogatának.

Legyen $ABDE$ tetraéder súlypontja S. Írjuk föl a $\overrightarrow{GS}$ vektort. Tekintve, hogy $\overrightarrow{GA} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{GB} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\overrightarrow{GD} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{GE} = \mathbf{a}+\mathbf{c}$, az $ABDE$ tetraéder súlypontjának helyvektora így kapható meg:

$$\overrightarrow{GS} = \frac{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}}{4} = \frac{3}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

Ezért

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{GS} - \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GS} - \frac{\overrightarrow{GA}}{2} = \frac{3}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

Ebből láthatjuk, hogy $\overrightarrow{OS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}$, ami azt jelenti, hogy az O centrumú, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságban G képe S. Ugyanígy a másik három levágott tetraéder súlypontja a beírt tetraéder egy-egy további csúcsának képe az említett középpontos hasonlóságban. Ezért a súlypontok meghatározta tetraéder térfogata a beírt tetraéder térfogatának $\left(\frac{1}{2}\right)^3$-szerese, tehát a paralelepipedon köbtartalmának $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$ része.

Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések 1. Néhány megoldónk elemi geometriai eszközökkel (paralelogramma tulajdonságok, súlyvonalak osztási aránya) találta meg az előzőekben leírt $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot. Ezek az egyébként szép megoldások valamivel hosszabbak, mint a fenti vektoros megoldás.

2. Csörnyei Marianna 2. megoldásában fölhasználta, hogy a paralelepipedon affinitással kockába vihető át. Mivel az affinitás aránytartó, elegendő a feladatot kockára megoldani. Ezután kiszámította a súlypontok által meghatározott (szabályos) tetraéder élét, majd a térfogatát.