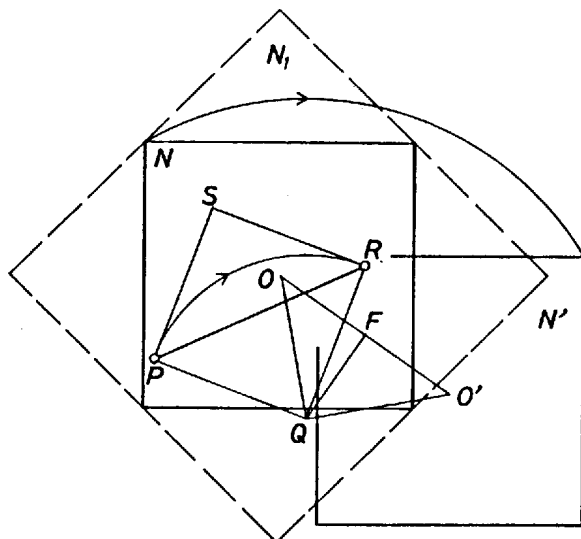


Jelölje N az adott négyzetlemez, O pedig annak középpontját. Tekintsük az N oldalait mint átlók fölé rajzolt négyzetlemez N_1 unióját. Könnyen beláthatjuk, hogy N_1 az N -ből O körüli 45° -os szögű és $\sqrt{2}$ arányú forgatva nyújtással is származtatható. Megmutatjuk, hogy N_1 a keresett síkrész.



Vegyünk ehhez egy tetszőleges $PQRS$ négyzetlemez, amelynek PR átlója illeszkedik N -re. Be kell bizonyítanunk, hogy Q és S az N_1 négyzetlemez pontjai. A P pontot egy Q körüli 90° -os elforgatással átvihetjük R -be. Ha ebben a forgatásban O képe O' , akkor N képe olyan O' középpontú N' négyzet, amelynek oldalai N oldalaival párhuzamosak. Az N és N' négyzetlemeznek R közös pontja, hiszen $R \in N$ és R a P pont képe, tehát $R \in N'$. Az egybevágó és párhuzamos oldalú N és N' négyzetek közös része nem üres, ezért az OO' szakasz F felezőpontja a közös részben van, így $F \in N$. Mivel OOQ' egyenlő szárú derékszögű háromszög, és az OO' átfogó felezőpontja F , ezért $OF : OQ = 1 : \sqrt{2}$, tehát az O középpontú, 45° -os szögű, $\sqrt{2}$ arányú forgatva nyújtás az F pontot a Q -ba viszi át. N_1 említett származtatása miatt ebből következik, hogy Q az N_1 négyzetlemez pontja. Hasonlót mondhatunk az S pontról. Ezzel látjuk, hogy a P, Q, R, S pontok illeszkednek N_1 -re, és mivel N_1 konvex, a $PQRS$ négyzet is N_1 -ben van. Mivel az N oldalait mint átlók fölé rajzolt négy négyzetlemez lefedi N_1 -et, a keresett síkrész N_1 .

Kálmán Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A megoldásban hallgatólagosan fölhasználtuk, hogy N, N_1 és a lefedő $PQRS$ négyzetlapok zárt halmazok. Ha N -hez nem számítjuk hozzá a határt, akkor a fenti megoldáshoz hasonlóan megmutatható, hogy a keresett síkrész a nyitott N_1 négyzet, akár nyitottnak, akár zártan tekintjük a lefedő négyzetlapokat.