I. megoldás. Legyen $a+b+c=1$, ahol $c\geq 0$, és alakítsuk át az egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$\begin{aligned} 9ab(1-c)+(a+b)(a+b+c) &\geq a^2+10ab+b^2, \\ ab+bc+ca &\geq 9abc, \\ (ab+bc+ca)(a+b+c) &\geq 9abc, \\ a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 &\geq 6abc. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség pedig a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján igaz:

$$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}{6}\geq \sqrt[6]{a^2b\cdot ab^2\cdot b^2c\cdot bc^2\cdot c^2a\cdot ca^2}=abc.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a^2b=ab^2=b^2c=bc^2=c^2a=ca^2$, ami $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ esetén teljesül.

Pál András (Budapest, Budai Nagy A. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen $x=a+b$ és $y=ab$. A feladat feltételei szerint $0<x\leq 1$, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján pedig $0<y\leq\dfrac{x^2}{4}$.

Az egyenlőtlenségbe behelyettesítve és átrendezve:

$$\begin{aligned} 9xy-x^2-8y+x &\geq 0, \\ y(9x-8)+x(1-x) &\geq 0. \end{aligned}$$

1. Ha $9x-8\geq 0$, akkor az egyenlőtlenség bal oldala pozitív.

2. Ha $9x-8<0$, akkor a bal oldalt nem növeljük, ha y helyére a nála nem kisebb $\dfrac{x^2}{4}$-et írjuk. Elég tehát ekkor azt bizonyítani, hogy

$$\frac{x^2}{4}(9x-8)+x(1-x)\geq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség x-szel való osztás és rendezés után a következőképpen alakul:

$$9x^2-12x+4\geq 0,\ \text{azaz}\ (3x-2)^2\geq 0,$$

ez pedig valóban igaz.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $3x-2=0$, azaz $x=\dfrac{2}{3}$ (ebben az esetben $9x-8<0$ valóban teljesül) és $y=\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{1}{9}$. Mivel $y=\dfrac{x^2}{4}$ pontosan akkor teljesül, ha $a=b$, ebből $a=b=\dfrac{1}{3}$ következik.

Egyenlőség tehát csak $a=b=\dfrac{1}{3}$ esetén lép fel.

Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)