Legyen $b_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$. A zárójelet a binomiális tétel szerint felbontva láthatjuk, hogy b_n értéke (minden n-re) egész szám. Mivel páros n-re $0 < (1-\sqrt{2})^n < 1$, páratlan n-re pedig $-1 < (1-\sqrt{2})^n < 0$, azért

$$b_n = \begin{cases} [(1+\sqrt{2})^n] + 1 = a_n + 1, & \text{ha } n \text{ páros.} \\ [(1+\sqrt{2})^n] = a_n & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Így $a_{2m} = b_{2m} - 1$ és $a_{2m-1} = b_{2m-1}$. A bizonyítandó összefüggések közül az elsőt a b_n-ek segítségével felírva:

$$b_{2k} - 1 = 2b_{2k-1} + b_{2k-2} - 1,$$

azaz

$$b_{2k} = 2b_{2k-1} + b_{2k-2}, \tag{1}$$

a második összefüggés pedig a következő alakot ölti

$$b_{2k+1} = 2(b_{2k} - 1) + b_{2k-1} + 2,$$

azaz

$$b_{2k+1} = 2b_{2k} + b_{2k-1}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) együtt éppen azt jelenti, hogy minden n-re

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n. \tag{3}$$

A (3) azonosság fennállását egyszerű számolással igazolhatjuk:

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= (1+\sqrt{2})^{n+2} + (1-\sqrt{2})^{n+2} = \\ &= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n+1} = \\ &= 2b_{n+1} + (\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})^{n+1} + (-\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})^{n+1} = \\ &= 2b_{n+1} + (\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + (-\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n = \\ &= 2b_{n+1} + b_n. \end{aligned}$$

Faragó Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Észrevehetjük, hogy $1+\sqrt{2}$ és $1-\sqrt{2}$ az $x^2 - 2x - 1$ polinom gyökei. A megoldásbeli számoláshoz hasonlóan általában beláthatjuk, hogy ha $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ az $x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \ldots - a_1x - a_0$ polinom gyökei, és $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tetszőleges rögzített számok, akkor a

$$b_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n + \ldots + c_kx_k^n \qquad (n = 1, 2\ldots)$$

sorozat elemeire teljesül a

$$b_{n+k} = a_{k-1}b_{n+k-1} + a_{k-2}b_{n+k-2} + \ldots + a_1b_{n+1} + a_0b_n$$

rekurzió. Ez az észrevétel lehetővé teszi, hogy lineáris rekurzióval adott sorozatok tagjait explicit formulával előállítsuk. Legyenek ugyanis $d_1,\ \ldots,\ d_k; a_0,\ \ldots,\ a_{k-1}$ rögzített számok, és definiáljuk a (b_n) sorozatot a következőképpen:

$$b_1 = d_1, \qquad b_2 = d_2, \qquad \ldots, \qquad b_k = d_k,$$

$$\begin{aligned} &b_{k+1} = a_{k-1}b_k + a_{k-2}b_{k-1} + \ldots + a_1b_2 + a_0b_1, \\ &\quad\vdots \\ &b_{k+i} = a_{k-1}b_{k+i-1} + a_{k-2}b_{k+i-2} + \ldots + a_1b_{i+1} + a_0b_i \qquad (i = 1,\ 2, \ldots). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az $x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \ldots - a_0$ polinomnak $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k$ *páronként különböző* gyökei. Megmutatható, hogy ekkor léteznek olyan $c_1, \ldots, c_k$ számok, amelyekkel (*bármely* n-re) a sorozat n-edik tagja: $b_n = c_1x^n + \ldots + c_kx^n$; a c_i értékeket egy k egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk.

Példaként tekintsük a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{i+2} = b_{i+1} + b_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ előírással meghatározott, közismert Fibonacci-sorozatot. A rekurzióbeli együtthatók segítségével előálló $x^2 - x - 1$ polinom gyökei $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Keressük a sorozat elemeit $b_n = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ alakban. (Bárhogyan válasszuk is c_1, c_2-t, ezzel már a $b_{i+2} = b_{i+1} + b_i$ összefüggés fennállását biztosítottuk.) A $b_1 = b_2 = 1$ követelmény a következő két egyenletet adja c_1-re és c_2-re:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2 = 1, \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2}c_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}c_2 = 1.$$

Az egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása: $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, így az n-edik Fibonacci-szám:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk a következő kérdést: Hogyan „menthető át” az ismertetett módszer azokban az esetekben, amikor a megfelelő polinom gyökei nem mind különbözőek (létezik „többszörös” gyök), illetve ha a polinomnak egyáltalán nem létezik valós gyöke. Az előbbihez $b_1 = b_2 = 1,\ b_{i+2} = 6b_{i+1} - 9b_i$, az utóbbihoz $b_1 = b_2 = 1,\ b_{i+2} = 2b_{i+1} - 4b_i$ vizsgálata szolgálhat tapasztalatokkal.