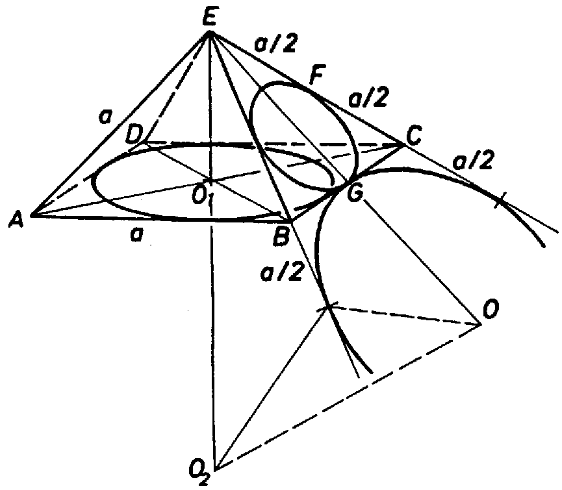
I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.



1. ábra

Az egyik gömb – az úgynevezett belső érintő gömb – a gúla éleit belső pontokban érinti, szimmetria okokból az AB, BC, CD, DA alapéleket a felezőpontjukban. Érintse ez a gömb az EC élt az F pontban. A másik gömb – a külső érintő gömb – az alapéleket ugyancsak a felezőpontjukban érinti, az oldaléleket pedig a meghosszabbításukon, pl. EC-t a H pontban. A gömbhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján $CF=CG=\frac{a}{2}$ és $CG=CH=\frac{a}{2}$ (G a gömbök érintési pontja a BC élen, a pedig a gúla éle). Így $EF=EC-FC=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$, és $EH=\frac{3a}{2}$. Az E középpontú középpontos hasonlóságban $EF:EH=1:3$. Ezért a gömbök térfogatának aránya 1:27.

Megjegyzések: 1. A gúla E csúcsa egy középpontos hasonlóság centruma. A két élérintő gömböt úgy is származtathatjuk, hogy fölveszünk egy „kis” gömböt, amely érinti az E-ből kiinduló éleket, és középpontja a gúla belsejében van. Nagyítsuk ezt E-ből addig, amíg érinti a gúla alapéleit, majd tovább nagyítunk, amíg ez újra bekövetkezik.

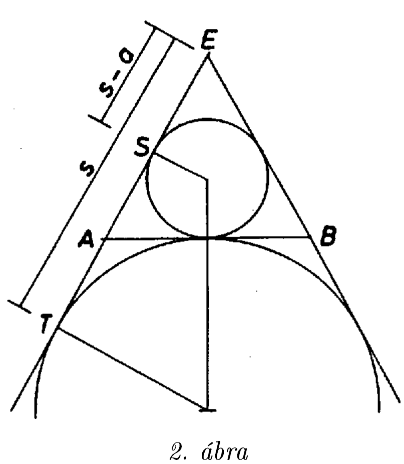
2. Legyen az $ABCD$ négyzet középpontja O_1. Könnyen látható, hogy az EO_1C háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Ezért az EC szakasz felező merőleges síkja a gúla EO_1 magasságát O_1-ben metszi. Így a belső élérintő gömb sugara $O_1F=\frac{a}{2}$, a másik gömb sugara pedig $\frac{3a}{2}$.

3. Gúlánkat az alaplapjára tükrözve szabályos oktaédert kapunk. Ebből nyilvánvaló, hogy a kis gömb középpontja az alapnégyzetben van.

Galambos István (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o. t.)
Kálmán Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Fölhasználjuk az első megoldásban említett középpontos hasonlóságot.

A gúla EAB oldallapjának síkja mindkét gömböt egy-egy körben metszi. Mivel a gúla élei a gömbök érintői, az élek a metszetköröknek is érintői lesznek.



2. ábra

A *2. ábrán* S és T az EA egyenes és e körök közös pontjai. Ismeretes, hogy az ES és ET érintőszakaszok hossza $s-a$, illetve s. Tekintve, hogy az E centrumú középpontos hasonlóság ezeket a köröket is egymásba viszi át, e körök sugarainak, illetve a gömbök sugarainak aránya:

$$\frac{s-a}{s} = \frac{\frac{3}{2}a - a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{3},$$

s így a térfogatok aránya 1:27.

Megjegyzés: Néhány megoldó megállapította, hogy a két gömb sugarának aránya minden olyan szabályos gúlára 1:3, amelynek élei egyenlő hosszúak. Megjegyezzük, hogy az ilyen gúla legfeljebb ötoldalú lehet. Ugyanis szabályos hatoldalú (vagy 6-nál több oldalú) gúla oldaléle mindig nagyobb, mint az alapél.

Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Kálmán Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)