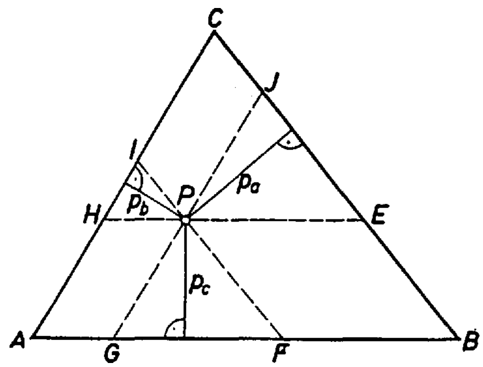
I. megoldás. Legyen a feladatban szereplő belső pont P. Húzzunk P-n át párhuzamosokat a háromszög oldalaival.



Használjuk az *ábra* további jelöléseit is. A HPI, GFP, PEJ háromszögek hasonlóak az ABC háromszöghöz, a hasonlóság aránya legyen rendre α, β, γ. Az ábráról leolvasható, hogy $AB = AG + GF + FB = HP + GF + PE = \alpha \cdot AB + \beta \cdot AB + \gamma \cdot AB$, amiből azonnal következik, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 1$. A számtani és mértani közép közti összefüggés szerint $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \leq \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, amit $m_a m_b m_c$-vel szorozva: $\alpha \cdot m_a \cdot \beta \cdot m_b \cdot \gamma \cdot m_c \leq \frac{m_a m_b m_c}{27}$.

Ebből $27 p_a \cdot p_b \cdot p_c \leq m_a m_b m_c$; fölhasználtuk, hogy pl. $\alpha m_a = p_a$. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk. Egyenlőség akkor áll fenn, ha α, β, γ számtani és mértani közepe megegyezik, tehát ha $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, azaz $p_a = \frac{m_a}{3}$, $p_b = \frac{m_b}{3}$, $p_c = \frac{m_c}{3}$. Ez pontosan akkor következik be, ha P a háromszög súlypontja.

Ujváry-Menyhárt Zoltán (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög területét t-vel, a BCP, ABP, CAP háromszögek területét pedig t_1, t_2, t_3-mal. Világos, hogy $t_1 + t_2 + t_3 = t$. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\left(\frac{t}{3}\right)^3 = \left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right)^3 \geq t_1 t_2 t_3. \tag{1}$$

Az $\frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2} = t$ összefüggések alapján $t^3 = \frac{abc \cdot m_a \cdot m_b \cdot m_c}{8}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t_1 t_2 t_3 = \frac{abc \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c}{8}$, hiszen pl. $t_1 = \frac{a p_a}{2}$. A két utóbbi összefüggés szerint (1) így alakul:

$$\frac{abc \cdot m_a \cdot m_b \cdot m_c}{8 \cdot 27} \geq \frac{abc \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c}{8}, \quad \text{amiből}$$
$$m_a m_b m_c \geq 27 \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c.$$

Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha (1)-ben egyenlőség áll fenn, tehát ha $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{t}{3}$, azaz, ha P a háromszög súlypontja.