Ha $n \le k$, akkor a jobb oldalon $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$ áll, ami éppen az n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma, ekkor (1) nyilvánvalóan teljesül. Feltehetjük tehát, hogy $n > k$.

Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor k csak 1 lehet, így előbbi megjegyzésünk szerint fennáll a kívánt egyenlőség.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$-re. Megmutatjuk, hogy akkor n-re is igaz.

Legyen x az n elemű halmaz egyik eleme. Tekintsük a megadott részhalmazok közül azokat, amelyek tartalmazzák x-et. Ha x-et mindegyikből elhagynánk, akkor ezek egy $(n-1)$-elemű halmaz részhalmazai lennének, és közülük bármely két különbözőnek $(k-1)$-nél kevesebb közös eleme lenne, mert x is közös elem volt eredetileg. Ezért az indukciós feltevés szerint ezen halmazok száma legfeljebb

$$m_1 = \sum_{i-0}^{k-1}\binom{n-1}{i}.$$

(Ez akkor is igaz, ha $k = 1$).

Tekintsük most azokat a megadott részhalmazokat, amelyek nem tartalmazzák x-et. Ezek egy x-et nem tartalmazó, $n-1$ elemű halmaznak is részei, tehát az indukciós feltevés alapján számuk legfeljebb

$$m_2 = \sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i}.$$

Az összes megadott részhalmazok száma pedig nyilván legfeljebb $m_1 + m_2$, azaz

$$m \le m_1 + m_2 = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i} =$$

$$= \binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{k}\left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right) = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Ha a megadott halmazok az n elemű halmaz legfeljebb k elemű részhalmazai, akkor (1)-ben egyenlőség áll, tehát az állítás éles.

2. Ha egy n elemű halmaz bizonyos részhalmazairól csupán annyit követelünk meg, hogy közülük bármelyik kettő (különböző) közös elemeinek száma legfeljebb k-féle lehet, akkor ezen részhalmazok száma legfeljebb $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$. Ennek a – Ray-Chaudhusi és Wilson néven ismert – tételnek a bizonyítása azonban az ismertetett megoldásnál lényegesen nehezebb.