Megmutatjuk, hogy a $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $a+\frac{1}{a}$ egész, és $|a|\neq 1$. Nyilván

$$\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=a+\frac{1}{a}-[a]-\left[\frac{1}{a}\right].$$

Ha $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$, akkor $a+\frac{1}{a}$ egész, és az is igaz, hogy $|a|\neq 1$, mivel ellenkező esetben a és $\frac{1}{a}$ is egész, és $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=0$ lenne. Megfordítva, ha $a+\frac{1}{a}$ egész, és $|a|\neq 1$, akkor $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}$ is egész; mivel a törtrészfüggvény 1-nél kisebb nemnegatív értékeket vesz fel, a kifejezés értéke csak 0 és 1 lehet. Mivel azonban $|a|\neq 1$, a és $\frac{1}{a}$ közül valamelyik biztosan nem egész, tehát 0 nem lehet.

Észrevételünk szerint elég azt bizonyítani, hogy tetszőleges n pozitív egészre $a^n+\frac{1}{a^n}$ egész szám, és $|a^n|\neq 1$. Ez utóbbi nyilván igaz, hiszen $|a^n|=|a|^n$.

Azt, hogy $a^n+\frac{1}{a^n}$ egész, teljes indukcióval látjuk be. A feladat feltétele szerint ez $n=1$-re igaz. Az $n=2$ esetben:

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2, \text{ ami egész.}$$

Végül, ha $a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}$ és $a^n+\frac{1}{a^n}$ egész, akkor

$$a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)-\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

is egész ($n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$). Ezzel az állítást igazoltuk.