I. megoldás. Felhasználjuk a jól ismert

$$1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2} \tag{1}$$

és

$$1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \tag{2}$$

azonosságokat. A szokásos jelölésekkel

$$S_n=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=a_1^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2+\dots+(a_1+(n-1)d)^2=$$
$$=a_1^2+(a_1^2+2a_1d+d^2)+(a_1^2+4a_1d+4d^2)+\dots+(a_1^2+2(n-1)a_1d+(n-1)^2d^2)=$$
$$=na_1^2+2(1+2+\dots+(n-1))a_1d+(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2)d^2=$$
$$=na_1^2+n(n-1)a_1d+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2. \tag{3}$$

A feladatbeli sorozatban $d=3$, tehát

$$S_n=na_1^2+3n(n-1)a_1+\frac{3}{2}n(n-1)(2n-1). \tag{4}$$

A második feltétel szerint az első 2001 elem négyzetösszege kétszer annyi, mint az első 1001 elemé, azaz

$$S_{2001}=2S_{1001}.$$

Felhasználva (4)-et:

$$2001a_1^2+12\ 006\ 000a_1+24\ 018\ 003\ 000=2002a_1^2+6\ 006\ 000a_1+6\ 009\ 003\ 000,$$

rendezve:

$$a_1^2-6\ 000\ 000a_1-18\ 009\ 000\ 000=0;$$

tehát

$$a_1=-3000 \qquad \text{vagy} \qquad 6\ 003\ 000.$$

II.megoldás. Ha észrevesszük, hogy a feltételek nyilván teljesülnek a $-3000,-2997,\dots,3000$ sorozatra (amelynek 1001-edik eleme 0), láthatjuk: érdemesebb a sorozat elemeit az 1001-edik elem segítségével kifejezni. Ezzel a módszerrel nincs szükség a (2) azonosságra sem.

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_{1001}^2=$$
$$=(a_{1001}-3000)^2+(a_{1001}-2997)^2+\dots+(a_{1001}-3)^2+a_{1001}^2=$$
$$=1001a_{1001}^2-6(1+2+\dots+1000)a_{1001}+9(1^2+2^2+\dots+1000^2)=$$
$$=1001a_{1001}^2-3\ 003\ 000a_{1001}+9(1^2+2^2+\dots 1000^2)$$

és

$$a_{1002}^2+\dots+a_{2001}^2=$$
$$=(a_{1001}+3)^2+(a_{1001}+6)^2+\dots+(a_{1001}+3000)^2=$$

$$=(a_{1001}^2+6a_{1001}+9)+(a_{1001}^2+12a_{1001}+36)+\dots$$
$$\dots+(a_{1001}^2+6000a_{1001}+9\ 000\ 000)=$$

$$=1000a_{1001}^2+6(1+2\dots+1000a_{1001})+9(1^2+2^2+\dots+1000^2)=$$
$$=1000a_{1001}^2+3\ 003\ 000a_{1001}+9(1^2+2^2+\dots+1000^2).$$

A feltételek szerint ez a két összeg egyenlő, azaz

$$1001a_{1001}^2-3\ 003\ 000a_{1001}+9(1^2+2^2+\dots+1000^2)=$$
$$=1000a_{1001}^2+3\ 003\ 000a_{1001}+9(1^2+2^2+\dots+1000^2).$$

Rendezve:

$$a_{1001}^2-6\ 006\ 000a_{1001}=0.$$

Ebből $a_{1001}=0$ vagy $a_{1001}=6\ 006\ 000$, tehát $a_1=-3000$ vagy $6\ 003\ 000$.