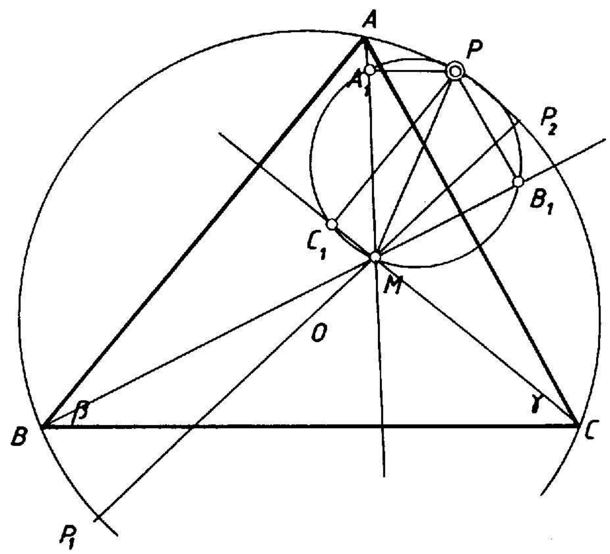
Először bebizonyítjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög – ha létezik – hasonló az ABC háromszöghöz.



Ha P egybeesik M-mel, (ez esetben a háromszög derékszögű és M a derékszögű csúcs), akkor A_1, B_1, C_1 is egybeesik M-mel. Egyébként az A_1, B_1, C_1 pontok a PM szakasz Thalész-körén helyezkednek el. Feltételeink szerint $PA_1||BC$, $PB_1||AC$ és $PC_1||AB$. (Ha a P pont egybeesik valamelyik csúccsal pl. A-val, akkor PA_1 a PM átmérőjű kör A-beli érintője.) A felsorolt párhuzamosságok miatt pl. a PA_1 és PB_1 egyenesek szöge párhuzamos szárú szög a háromszög γ szögével, ezért $A_1PB_1\sphericalangle$ vagy γ, vagy $\pi-\gamma$. Így az $A_1B_1C_1P$ húrnégyszögből $A_1C_1B_1\sphericalangle$ vagy γ, vagy a $\pi-\gamma$. Hasonlóan beláthatjuk, hogy az $A_1B_1C_1\sphericalangle$ vagy β, vagy $\pi-\beta$, illetve a $B_1A_1C_1\sphericalangle$ vagy α, vagy $\pi-\alpha$. Ha a felsorolt esetekben a szögek aktuális értéke α, β, γ, akkor az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszögek valóban hasonlóak.

Egyébként még három esetre kell gondolnunk aszerint, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei közül egy, kettő vagy mindhárom az α, β, γ szögek kiegészítő szöge:

1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei: $\pi-\alpha$, β, γ. Ekkor $\pi=\pi-\alpha+\beta+\gamma=\pi-2\alpha+\alpha+\beta+\gamma=2\pi-2\alpha$, amiből $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, de akkor $\pi-\alpha=\alpha$, és a két háromszög most is hasonló.

2. Az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei: $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, γ. Ez azonban lehetetlen, mert $\pi-\alpha+\pi-\beta+\gamma=\pi$-ből $\alpha+\beta>\pi$, ellentmondás.

3. Az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei: $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$, ami ugyancsak lehetetlen.

Beláttuk tehát, hogy a $P\equiv M$ esetet kivéve, az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszögek hasonlóak. Könnyű észrevenni, hogy – egymáshoz hasonló – háromszögek közül annak a területe nagyobb, amelyiknek a körülírt köre nagyobb; tehát minél nagyobb az MP átmérő, annál nagyobb lesz az $A_1B_1C_1$ háromszög területe. Ezért az MO egyenes metszi ki a legnagyobb és a legkisebb területű háromszöget meghatározó P_1, illetve P_2 pontot az ABC körülírt köréből. Ha $M\equiv O$, akkor az MO egyenes ugyan határozatlan, ám ekkor a PM távolság állandó, és így $A_1B_1C_1$ területe is állandó.

Veres Gábor (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek hasonlóságának bizonyításához nem használtuk ki, hogy P a körülírt körön van. Ezért a hasonlóságra vonatkozó állítás a sík bármely pontjára érvényes.