Jelöljük $S_{d,a}$-val azt a számtani sorozatot, amelynek differenciája d és első eleme a (például $S_{5,2} = (2, 7, 12, 17, \ldots)$).
Könnyű ellenőrizni, hogy az

$$S_{2,0}, \quad S_{3,0}, \quad S_{4,1}, \quad S_{6,1}, \quad S_{12,11} \tag{1}$$

sorozatok együttvéve az összes pozitív egész számot tartalmazzák. Valóban, $S_{2,0}$ tartalmazza mindazokat a pozitív egészeket, amelyek 12-vel osztva 0, 2, 4, 6, 8 vagy 10 maradékot adnak; $S_{3,0}$ tartalmazza azokat a számokat, amelyek 12-vel osztva 0, 3, 6, vagy 9 maradékot adnak; $S_{4,1}$ azokat, amelyek 1-et, 5-öt vagy 9-et; $S_{6,1}$ azokat, amelyek 1-et vagy 7-et; végül $S_{12,11}$ azokat, amelyek 12-vel osztva 11 maradékot adnak. Mivel mindegyik lehetséges maradék szerepelt legalább egyszer, a felsorolt öt sorozat valóban tartalmazza az összes pozitív egészt. A baj csak az, hogy az egyik sorozat differenciája a 2.

Az (1)-ben szereplő sorozatok segítségével megadunk néhány sorozatot, amelyek lefedik az összes páros számot, és megadunk néhány további sorozatot, amelyek a páratlan számokat tartalmazzák.

Tekintsük a következő sorozatokat:

$$S_{32,0}, \quad S_{48,0}, \quad S_{64,16}, \quad S_{96,16}, \quad S_{192,176}, \quad S_{16,8}, \quad S_{8,4}, \quad S_{4,2}. \tag{2}$$

Az első öt éppen az (1)-ben szereplő sorozatok 16-szorosa; ezek tehát a 16-tal osztható pozitív egészeket tartalmazzák. Az $S_{16,8}$ sorozat azokat a természetes számokat tartalmazza, amelyek 8-cal oszthatók, de 16-tal nem; az $S_{8,4}$ azokat, amelyek 4-gyel oszthatók, de 8-cal nem; végül az $S_{4,2}$ azokból a pozitív páros számokból áll, amelyek 4-gyel nem oszthatók. A (2)-ben megadott sorozatok tehát az összes páros számot tartalmazzák.

Tekintsük ezután a következő sorozatokat:

$$S_{3,1}, \quad S_{6,5}, \quad S_{9,3}, \quad S_{18,15}. \tag{3}$$

Megmutatjuk, hogy ezek minden olyan (pozitív) páratlan számot tartalmaznak, amely nem osztható 9-cel.

Az $S_{3,1}$ és $S_{6,5}$ tartalmazzák a 3-mal nem osztható számokat (ha egy páratlan szám 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor 6-tal osztva 5-öt ad maradékul, ezért az ilyeneket tartalmazza $S_{6,5}$), míg $S_{9,3}$ és $S_{18,15}$ együttesen tartalmazzák azokat a 3-mal osztható páratlan számokat, amelyek 9-cel nem oszthatók, hiszen az ilyen számok 18-cal osztva csak 3 vagy 15 maradékot adhatnak.

Végül a 9-cel osztható páratlan számokat a következő sorozatok tartalmazzák:

$$S_{12,9}, \quad S_{36,27}, \quad S_{72,45}. \tag{4}$$

Egy 9-cel osztható páratlan szám ugyanis 72-vel osztva $9, 27, 45$ vagy 63 maradékot ad.

Az $S_{36,27}$ tartalmazza azokat, amelyek 27 vagy 63 maradékot adnak; az $S_{72,45}$ azokat, amelyek 45-öt; végül az $S_{12,9}$ az összes olyan számot tartalmazza, amely 72-vel osztva 9 maradékot ad.

A (2), (3) és (4) pontokban felsorolt sorozatok tehát az összes pozitív egész számot tartalmazzák. A differenciák szerint felsorolva:

$$S_{3,1}; \quad S_{4,2}; \quad S_{6,5}; \quad S_{8,4}; \quad S_{9,3}; \quad S_{12,9}; \quad S_{16,8}; \quad S_{18,15}; \quad S_{32,0};$$
$$S_{36,27}; \quad S_{48,0}; \quad S_{64,16}; \quad S_{72,45}; \quad S_{96,16}; \quad S_{192,176}.$$

Megjegyzések. 1. Természetesen sok más megoldás is létezik (például kicserélhetjük $S_{192,176}$-ot $S_{24,16}$-ra). Egy másik megoldás (*Csörnyei Marianna* dolgozata alapján):

$$S_{3,0}; \quad S_{4,0}; \quad S_{5,0}; \quad S_{6,1}; \quad S_{8,2}; \quad S_{10,1}; \quad S_{12,5}; \quad S_{15,2};$$
$$S_{20,19}; \quad S_{24,22}; \quad S_{30,23}; \quad S_{40,14}; \quad S_{60,38}; \quad S_{120,86}.$$

2. A feladattal kapcsolatban sok nevezetes megoldatlan kérdés ismert; például lehet-e az összes differencia páratlan? Lehet-e a legkisebb differencia akármilyen nagy? (Ez utóbbi Erdős Pál problémája.)

3. Ha azt is megköveteljük, hogy a sorozatok diszjunktak legyenek, akkor a feladatnak nincs megoldása. Erről részletesebben a KöMaL 1986/4. számában, a 154. oldalon olvashatnak az érdeklődők.