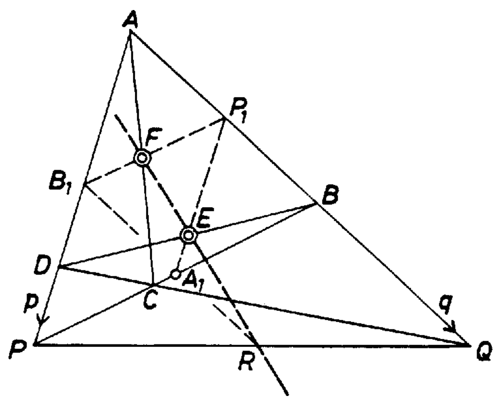
I.megoldás. Jelöljük a PQ szakasz felezőpontját R-rel. Megmutatjuk, hogy az $\overrightarrow{RE}$ vektor egyállású az $\overrightarrow{EF}$ vektorral, amiből már következik, hogy az R, E, F pontok egy egyenesen vannak.



Legyen $\overrightarrow{AP} = \mathbf{p}, \overrightarrow{AQ} = \mathbf{q}$, és így $\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \mathbf{p}, \overrightarrow{AB} = \beta \cdot \mathbf{q}$ $(0 < \alpha, \beta < 1)$.

Ezekből $\overrightarrow{AR} = \dfrac{\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2}$ és $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q}}{2}$. Írjuk föl kétféleképpen az $\overrightarrow{AC}$ vektort.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \gamma\overrightarrow{DQ} = \alpha\mathbf{p} + \gamma(\mathbf{q} - \alpha\mathbf{p}) = (\alpha - \alpha\gamma)\mathbf{p} + \gamma\mathbf{q},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \delta\overrightarrow{BP} = \beta\mathbf{q} + \delta(\mathbf{p} - \beta\mathbf{q}) = \delta\mathbf{p} + (\beta - \beta\delta)\mathbf{q},$$

ahol γ és δ valós számok. A kétféle fölírást összehasonlítva: $\alpha - \alpha\gamma = \delta$ és $\gamma = \beta - \beta\delta$. Ebből az egyenletrendszerből $\gamma = \beta\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$ és $\delta = \alpha\dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$. A kapott értékekkel $\overrightarrow{AC} = \left(\alpha - \alpha\beta\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\right)\mathbf{p} + \left(\beta - \alpha\beta\dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right)\mathbf{q}$. Mivel $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EF}$ így határozható meg: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\alpha\beta\left(\dfrac{\alpha-1}{1-\alpha\beta}\mathbf{p} + \dfrac{\beta-1}{1-\alpha\beta}\cdot\mathbf{q}\right) = \dfrac{\alpha\beta}{2(1-\alpha\beta)}[(\alpha-1)\mathbf{p} + (\beta-1)\mathbf{q}]$.
Végül $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AR} = \dfrac{1}{2}[(\alpha-1)\ \mathbf{p} + (\beta-1)\mathbf{q}]$, és így $\dfrac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \cdot \overrightarrow{RE} = \overrightarrow{EF}$, ami azt jelenti, hogy az EF egyenes átmegy a PQ szakasz R felezőpontján.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

II.megoldás. Jelöljük az AB, BP, PA szakaszok felezőpontját rendre P_1, A_1, illetve B_1-gyel. Mivel A_1P_1 középvonal az ABP háromszögben, E illeszkedik A_1P_1-re. Hasonló okból F illeszkedik B_1P_1-re, R pedig A_1B_1-re. A Menelaosz-tétel megfordítása szerint az $A_1B_1P_1$ háromszög oldalain fekvő F, E, R pontok éppen akkor lesznek egy egyenesen, ha teljesül az

$$\frac{A_1E}{EP_1} \cdot \frac{P_1F}{FB_1} \cdot \frac{B_1R}{RA_1} = -1 \tag{1}$$

egyenlőség; ezt kell tehát megmutatnunk. A háromszög középvonalára vonatkozó tétel szerint $A_1E = \frac{1}{2}PD$, $EP_1 = \frac{1}{2}DA$, $P_1F = \frac{1}{2}BC$, $FB_1 = \frac{1}{2}CP$, $B_1R = \frac{1}{2}AQ$, $RA_1 = \frac{1}{2}QB$. Ezeket fölhasználva (1) a következő alakot ölti:

$$\frac{PD}{DA} \cdot \frac{BC}{CP} \cdot \frac{AQ}{QB} = -1.$$

Ez pedig igaz, hiszen nem más, mint az ABP háromszögre és a Q, C, D pontokon átmenő egyenesre alkalmazott Menelaosz-tétel.

Kis 729 Gábor (Debrecen, Fazekas M. Gimn. III. o. t.) dolgozata alapján

III. megoldás. Feladatunk állítását H. S. M. Coxeter – S. L. Greitzer szerzők *Az újra felfedezett geometria* c. könyvének 92. oldalán lévő 3.1.4. és 91. oldalán lévő 3.1.3. tételek segítségével is megmutathatjuk. A 3.1.4. tétel szerint az EFP és EFQ háromszögek területe egyenlő, ugyanis e tétel alapján mindkét háromszög területe az $ABCD$ négyszög területének a negyede. Ezért az EF átló felezi az $EQFP$ négyszög területét. A 3.1.3. tétel szerint, ha egy átló a négyszöget két egyenlő területű részre osztja, akkor ez az átló felezi a másik átlót. Ezt a tételt az $EQFP$ négyszögre alkalmazva azt kapjuk, hogy EF felezi a PQ szakaszt.

Dőtsch András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn. II. o. t.) dolgozata nyomán