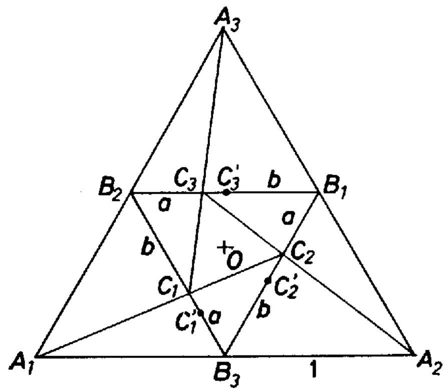
Jelölje O az $A_1A_2A_3$ szabályos háromszög középpontját. Tegyük fel, hogy C_1, C_2, C_3 megoldása a feladatnak.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy ekkor más megoldás nem létezik. Ha ugyanis a C_1', C_2', C_3' pontok is eleget tesznek a feladat követelményeinek, akkor például $C_3' \neq C_3$. Tételezzük fel, hogy C_3' a C_3B_1 szakasz belső pontja. Mivel A_3, C_3', C_1' is egy egyenesbe esnek, azért C_1' a C_1B_3 belsejében fekszik. Hasonlóan A_1, C_1', C_2' is egy egyenesen helyezkednek el, ezért C_2' csak B_3C_2 belsejében lehet. Így azonban az A_2C_3 egyenes elválasztja a C_2', C_3' pontokat, tehát A_2, C_2', C_3' nem lehetnek egy egyenesen. Ugyanerre az eredményre jutunk abban az esetben is, ha C_3' a B_2C_3 szakasz belsejében található; ezzel beláttuk, hogy a feladat megoldása (ha egyáltalán létezik) egyértelmű.

Forgassuk el az A_1, A_2, A_3, valamint a C_1, C_2, C_3 pontokat O körül 120°-kal. Mivel az A_1, A_2, A_3 pontok egymás elforgatottjai, azért a C_1, C_2, C_3 képei ismét egy megoldást szolgáltatnak. Az egyértelműség miatt ez csak úgy lehetséges, hogy C_1, C_2, C_3 egymásba mennek át az elforgatás során, vagyis a $C_1C_2C_3$ háromszög is szabályos. Ebből következik, hogy

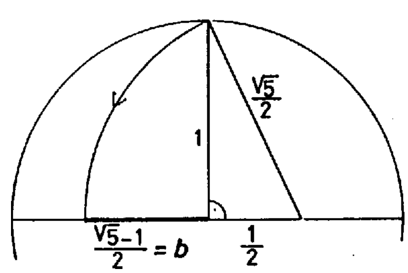
(1) $$C_2B_1 = C_3B_2 = C_1B_3 \qquad \text{és}$$

(2) $$B_3C_2 = B_1C_3 = B_2C_1.$$

Jelöljük az (1)-ben és (2)-ben szereplő szakaszok hosszát a-val, illetve b-vel, a $B_1B_2B_3$ háromszög oldala pedig legyen egységnyi. A $C_3C_2B_1$ és $A_2C_2B_3$ háromszögek hasonlók, mert szögeik páronként megegyeznek. Ezért $a : b = b : 1$, és mivel $a + b = 1$,

(3) $$a : b = b : (a + b).$$

Ez azt jelenti, hogy pl. a C_2 pont a B_1B_3 szakaszt az aranymetszés szerint osztja. A (3) egyenletet így írhatjuk: $b^2 = a(a + b)$ és mivel $a = 1 - b$, $b^2 = 1 - b$. Ebből az egyenletből $b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mivel b pozitív szám, $b = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. (A b szakasz szerkesztését a *2. ábrán* láthatjuk.)



2. ábra

Ha pl. a C_2 pontot a B_1B_3 szakaszon (3)-nak megfelelően megszerkesztjük, a B_1 és B_3-nál lévő 60°-os szögek és az ezeket közbezáró oldalak arányának megegyezése révén az $A_2C_2B_3$ és $C_3C_2B_1$ háromszögek hasonlóak lesznek. Ennek következménye, hogy az A_2, C_2, C_3 pontok egy egyenesre illeszkednek. Hasonlóan igaz az A_3, C_3, C_1 és A_1, C_1, C_2 ponthármasokra, tehát szerkesztésünk helyes.

Megjegyzés. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az $A_1A_2A_3$ háromszög nem szabályos. Ismeretes – azok számára, akik tanultak az affin transzformációkról – hogy bármely két háromszöghöz egyértelműen létezik egy olyan affinitás (egyenestartó transzformáció), amely az egyik háromszög csúcsait a másik csúcsaiba viszi át. Tudjuk továbbá, hogy az affin transzformáció egy egyenes három pontjának osztási arányát (az osztóviszonyt) megtartja, ezért pl. felezőpontot felezőpontba, szakasz aranymetszés szerinti osztópontját aranymetszés szerinti osztópontba visz át. Így egy szabályos háromszöghöz és egy tetszőleges $A_1A_2A_3$ háromszöghöz található a fenti tulajdonságokkal rendelkező affin transzformáció. Ez azt jelenti, hogy a szabályos háromszögre talált eljárás a C_1, C_2, C_3 pontok megszerkesztésére bármely háromszögnél alkalmazható.

Csörnyei Marianna (Főv. Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)