I. megoldás. Az $(x-a)$ és $(x-b)$ gyöktényezők kiemelésével az x^4+x^3-1 polinom

(1) $$x^4+x^3-1=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$$

alakban írható fel, ahol p_1, p_2, q_1, q_2 valós, ill. komplex számok, és $x^2+p_1x+q_1=(x-a)(x-b)$, azaz

(2) $$p_1=-(a+b) \text{ és } q_1=ab.$$

(1) ből beszorzással kapjuk, hogy

$$q_1q_2=-1; \quad (3) \qquad q_1+q_2+p_1p_2=0; \quad (5)$$
$$q_1p_2+p_1q_2=0; \quad (4) \qquad p_1+p_2=1; \quad (6)$$

(3)-ból és (6)-ból fejezzük ki q_2-t és p_2-t, majd helyettesítsük be (4)-be és (5)-be:
$q_2=-\dfrac{1}{q_1}$, ahol $q_i\neq 0; p_2=1-p_1$;

(4') $$q_1(1-p_1)-\frac{p_1}{q_1}=0;$$

(5') $$q_1-\frac{1}{q_1}+p_1(1-p_1)=0.$$

(4')-ből kifejezzük p_1-et, és behelyettesítjük (5')-be:

$$p_1=\frac{q_1^2}{1+q_1^2}, \quad \text{ahol } 1+q_1^2\neq 0 \ \text{ (Ez tejesül, hisz ellenkező esetben } q_1=0 \text{ lenne)}$$

(5") $$q_1-\frac{1}{q_1}+\frac{q_1^2}{1+q_1^2}\cdot\frac{1}{1+q_1^2}=0.$$

Ezt $q_1(1+q_1^2)^2$-nél megszorozva kapjuk, hogy

$$q_1^6+q_1^4+q_1^3-q_1^2-1=0;$$

$q_1=ab$ miatt ez éppen a bizonyítandó állítás.

Kárpáti Attila (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. II. o. t.)

II. megoldás. A feladat állításánál valamivel többet bizonyítunk be. Tekintsünk egy f negyedfokú polinomot, amelynek (valós, ill. komplex) gyökei α_1, α_2, α_3, α_4. Az f együtthatói segítségével konstruálunk egy olyan $F(x)$ hatodfokú polinomot, amelynek gyökei $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_4$, és $\alpha_3\alpha_4$ lesznek.

Nyilván feltehetjük, hogy f főegyütthatója 1, azaz $f(x)$

$$x^4-c_1x^3+c_2x^2-c_3x+c_4$$

alakú, ahol a Viete-formulák szerint

$$\begin{aligned}
c_1&=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4;\\
c_2&=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_3\alpha_4;\\
c_3&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4;\\
c_4&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.
\end{aligned}$$

Legyen

$$\begin{aligned}
F(x)&=(x-\alpha_1\alpha_2)(x-\alpha_1\alpha_3)\ldots(x-\alpha_3\alpha_4)=\\
&=x^6-k_1x^5+k_2x^4-k_3x^3+k_4x^2-k_5x+k_6,
\end{aligned}$$

ahol ugyancsak a Viete-formulák szerint

$$\begin{aligned}
k_1&=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4;\\
k_2&=(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)+(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_4)+\ldots+(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4); \qquad \text{(15 tag)}\\
k_3&=(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)+\ldots+(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4); \qquad \text{(20 tag)}\\
k_4&=(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)+\ldots+(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4);\\
k_5&=(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)+\ldots+(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4);\\
k_6&=(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4);
\end{aligned}$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
k_1 &= c_2;\\
k_2 &= c_1c_3 - c_4;\\
k_3 &= c_3^2 + c_4(c_1^2 - 2c_2);\\
k_4 &= c_4(c_1c_2 - c_4);\\
k_5 &= c_4^2c_2;\\
k_6 &= c_4^3.
\end{aligned}
$$

Alkalmazzuk a kapott összefüggéseket a feladatban szereplő $f(x) = x^4 + x^3 - 1$ polinomra:

$$
\begin{gathered}
c_1 = -1,\ c_2 = c_3 = 0,\ c_4 = -1;\ \text{ezekből (6) alapján}\\
k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1,\ k_4 = -1,\ k_5 = 0 \text{ és } k_6 = -1,\\
\text{azaz}\ \ F(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.
\end{gathered}
$$

Megjegyzés Ha $\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_3\alpha_4$ páronként különbözők, akkor F (konstans szorzótól eltekintve) egyértelmű. Ehhez nem elég az, hogy α_1, α_2, α_3, α_4 páronként különbözők, hiszen pl. az $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinom gyökei (az 1-től különböző komplex ötödik egységgyökök) is páronként különbözők, mégis van két olyan gyökpár, amelyek szorzata egyaránt 1.

Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)