I. megoldás. Ha $n=0$, akkor az állítás az $\binom{n}{k}$ együtthatónak $k=0$-ra való, ismert kiterjesztéséből következik.

Legyen $n\ge 1$. Ekkor $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ és $\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$, amiből

$$n\cdot\binom{2n}{n}=(n+1)\cdot\binom{2n}{n-1}. \tag{1}$$

Mivel n és $n+1$ relatív prímek, a bal oldalon álló $n\cdot\binom{2n}{n}$ szorzat csak úgy lehet osztható $(n+1)$-gyel, ha $\binom{2n}{n}$ osztható $(n+1)$-gyel.

Megjegyzések 1. Az (1) azonosságot $n=0$ esetén nem írhatjuk fel, ezért kellett ezt az esetet külön megvizsgálni.

2. (1)-et a következőképpen is átrendezhetjük:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}.$$

Eszerint $\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)}$ két egész szám különbsége.

Megjegyzés. A $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ számot az n-edik Catalan-számnak nevezik. Többféle kombinatorikai jelentése van: ennyiféleképpen lehet zárójelezni egy $(n+1)$-tagú összeget, ennyiféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$ -szöget $(n-1)$ átló behúzásával háromszögekre bontani stb.

Ha bevezetjük a $C_n=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ jelölést, akkor teljesül a következő rekurzió:

$$C_{n+1}=C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\ldots+C_nC_0.$$

Az állítás ebből is következik, bár már a rekurzió bizonyítása is hosszabb, mint maga a megoldás.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges p prímszámra $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ prímtényezős felbontásában a p kitevője legalább akkora, mint az $(n+1)$ prímtényezős felbontásában. (Ez ekvivalens az állítással.)

Legyen α a p kitevője az $(n+1)$ felbontásában. Ismeretes, hogy p kitevője $(2n)!$, illetve $(n!)^2$ prímtényezős felbontásában

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^i}\right],\ \text{illetve}\ D=2\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right].$$

($[x]$ az x egész részét jelöli.) Azt kell igazolnunk, hogy

$$S\ge\alpha+D. \tag{2}$$

Ehhez megmutatjuk, hogy

$$\left[\frac{2n}{p^i}\right]=1+2\left[\frac{n}{p^i}\right],\ \text{ha } 1\le i\le\alpha,\ \text{és} \tag{3}$$

$$\left[\frac{2n}{p^i}\right]\ge 2\left[\frac{n}{p^i}\right],\ \text{ha } i>\alpha. \tag{4}$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeadjuk (i mindazon értékeire, amelyekre $\left[\frac{2n}{p^i}\right]>0$), éppen (2)-t kapjuk.

Legyen $1\le i\le\alpha$. Mivel p^α osztója $(n+1)$-nek, p^i is osztója $(n+1)$-nek. Legyen $k=\frac{n+1}{p^i}$, azaz $n=p^ik-1$. Az előbbiek szerint k egész szám, ezért

$$\left[\frac{2n}{p^i}\right]=\left[\frac{2p^ik-2}{p^i}\right]=\left[2k-\frac{2}{p^i}\right]=2k-1\ \text{és}$$

$$2\left[\frac{n}{p^i}\right]=2\left[\frac{p^ik-1}{p^i}\right]=2\left[k-\frac{1}{p^i}\right]=2(k-1)=2k-2.$$

Ezzel (3)-at igazoltuk. Mivel pedig $[2x]\ge 2[x]$ tetszőleges x valós számra, (4) is igaz.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)