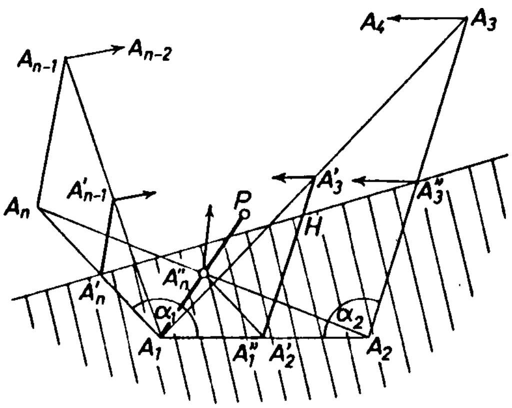
I.megoldás. Jelöljük a sokszög csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_n$-nel ($n \geqslant 5$), az A_i csúcsnál lévő szöget pedig α_i-vel. Válasszuk ki a sokszög két olyan szomszédos szögét, amelyek összege nagyobb $180°$-nál. Ilyen két szomszédos szög biztosan van, hiszen ellenkező esetben $\alpha_1 \leqslant 180° - \alpha_2,\ \alpha_2 \leqslant 180° - \alpha_3, \ldots, \alpha_n \leqslant 180° - \alpha_1$ lenne, amiből $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leqslant n \cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$, és így $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \leqslant n \cdot 180°$. Figyelembe véve, hogy az n oldalú sokszög szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$, $2(n-2) \cdot 180° \leqslant n \cdot 180°$ adódik, amiből $n \leqslant 4$. Ez ellentmondás, ezért van két olyan szomszédos szög, amelyek összege $180°$-nál nagyobb. Föltehetjük, hogy $\alpha_1 + \alpha_2 > 180°$. Kicsinyítsük a sokszöget $1:2$ arányban az A_1 pontból. Ekkor A_1 képe önmaga, az A_2 és A_n képe az A_1A_2, ill. A_1A_n oldal felezőpontja, minden további A_i csúcs képe pedig az A_1A_i átló felezőpontja.

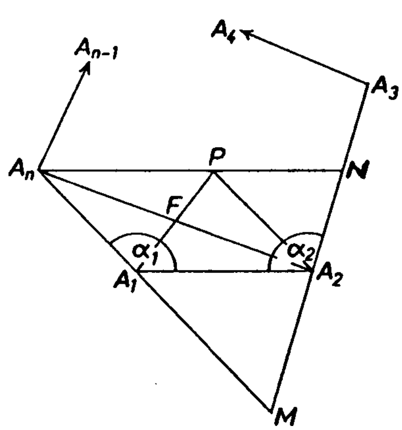


1. ábra

Ezért a kicsinyített sokszöglemez pontjai – az A_1-ből kiinduló két oldal pontjait kivéve – az eredeti n-szög belső pontjai. Ugyanezeket mondhatjuk el a sokszög A_2-ből való $1:2$ arányú kicsinyítésére.

Állítjuk, hogy a két kicsinyített sokszög egyikének belső pontja lesz a másik valamelyik csúcsa. Jelöljük az A_i csúcs képét az A_1, ill. A_2 középpontú kicsinyítésben A'_i, ill. A''_i-vel. Föltehetjük, hogy az A_n csúcs nincs távolabb az A_1A_2 egyenestől, mint az A_3. Ezért az $A'_nA''_3$ szakasz metszi az $A'_2A'_3$ szakaszt egy H pontban. Tekintsük az $A'_nA''_3$ egyenesnek azt a félsíkját, amelyben A_1 is van, hozzászámítva a félsíkhoz az egyenes pontjait is. A sokszög konvexsége következtében ebben a félsíkban benne van az A''_n, de nincs benne az A'_{n-1}. Az A'_3 pont vagy a félsík határán van, vagy ugyancsak nincs ebben a félsíkban. (Akkor lesz a félsík határán, ha az A_n és A_3 pontok ugyanolyan távolságra vannak az A_1A_2 egyenestől.) Ezért A''_n az A_1 csúcsból való kicsinyítéssel kapott sokszögnek belső pontja. Így, ha A''_n-re tükrözzük A_1-et, az eredeti sokszög egy belső pontjához jutunk. MivelA''_n egy átló felezőpontja, azért igaz a feladat állítása.

II. megoldás. Az I. megoldáshoz hasonlóan feltehető, hogy az A_1 és A_2 csúcsoknál fekvő szögek összege $180°$-nál nagyobb. Ismét föltehetjük, hogy A_1-nek A_n szomszédja legföljebb akkora távolságban van az A_1A_2 egyenestől, mint A_3. Bizonyítjuk, hogy ekkor A_1-nek az A_nA_2 átló F felezőpontjára való P tükörképe belső pontja a sokszögnek *(2. ábra)*.



2. ábra

Az $A_nA_1A_2P$ négyszög nyilván parallelogramma. Azt kell belátnunk, hogy az A_n-en át A_1A_2-vel húzott párhuzamos az A_2A_3 oldalt egy *belső* N pontjában metszi (vagy éppen A_3-ban), és hogy $A_nN > A_nP = A_1A_2$.

Első föltevésünk (ti. az A_1A_2 oldal kiválasztása, $\alpha_1 + \alpha_2 > 180°$ alapján) azt jelenti, hogy az A_nA_1 és A_3A_2 egyenesek M metszéspontjára $A_nM > A_1M$, és így a párhuzamos szelők tételét felhasználva következik, hogy

$$\frac{A_nN}{A_1A_2} = \frac{A_nM}{A_1M} > 1,$$

ezért $A_nP = A_1A_2 < A_nN$.

Második föltevésünk szerint $A_3M \geqslant NM$, tehát P valóban *belső* pontja az A_nN szakasznak.