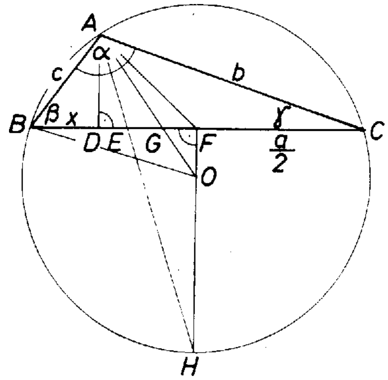
Legyen O a körülírt kör középpontja, G pedig AO és BC metszéspontja. Használjuk az ábra további jelöléseit is. Feltehetjük, hogy $AB < AC$. (Az $AB = AC$ esetben a feladat állítása nem érdekes.)



I. megoldás. A kerületi és középponti szögek tétele szerint $AOB\sphericalangle = 2\gamma$, ezért $BAO\sphericalangle = 90° - \gamma$. Könnyen látható, hogy $BAD\sphericalangle = 90° - \beta$ és $BAE\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta+\gamma}{2}$. Feltevésünk szerint $AB < AC$, ezért $\beta > \gamma$, így az előbb kiszámított szögekre:

$$BAD\sphericalangle < BAE\sphericalangle < BAO\sphericalangle.$$

Ennek alapján a pontok sorrendje a BC oldalon: B, D, E, F, C. Mivel a háromszög tompaszögű, O a háromszögön kívül van. Ezért $EG < EF$, és így elég azt megmutatni, hogy $DE < EG$. Számítsuk ki a DEA és EAG szögeket. Ezeket a korábban már meghatározott szögek különbségeként kaphatjuk:

$$DAE\sphericalangle = EAG\sphericalangle = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az ADG derékszögű háromszögben AE szögfelező. Mivel $AD < AG$, a szögfelező osztási arányára vonatkozó tételből láthatjuk, hogy $DE < EG$, amiből már következik a feladat állítása.

Megjegyzés. A megoldásból látható, hogy az A csúcsnál lévő szög nagyságától függetlenül érvényes a következő tétel: A háromszög bármelyik magasságvonalának a vele egy csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe átmegy a körülírt kör középpontján.

II. megoldás. Ismeretes, hogy a BC oldal felező merőlegese és az A csúcsból húzott belső szögfelező a körülírt körön metszik egymást. Az ADE és HFE háromszögek hasonlóak. Világos, hogy $AD < HF$, hiszen AD kisebb, mint egy, a HO átmérőegyenessel párhuzamos húr fele, HF pedig nagyobb, mint egy átmérő fele. De ha $AD < HF$, akkor az előbbi hasonlóság következtében $DE < EF$.

III. megoldás. Kifejezzük DE-t és EF-et a háromszög oldalaival, és összehasonlítjuk a két szakaszt. A szögfelezőre vonatkozó tétel szerint

$$\frac{c}{b} = \frac{BE}{a - BE}, \quad \text{amiből} \quad BE = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

A Pitagorasz tétel alapján $c^2 = x^2 + AD^2$ és $b^2 = (a-x)^2 + AD^2$, ezekből $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$.

Most már kiszámíthatjuk DE-t:

$$DE = BE - BD = \frac{a \cdot c}{b + c} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{b - c}{2a(b + c)} \left[(b + c)^2 - a^2\right],$$

ahol fölhasználtuk, hogy $b > c$, és ezért a pontok sorrendje a BC oldalon B, D, E, F, C.

Hasonló meggondolással $EF = BF - BE = \frac{a}{2} - \frac{a \cdot c}{b + c} = \frac{b - c}{2(b + c)} \cdot a$. A feladat állítása azt jelenti, hogy

$$\frac{b - c}{2a(b + c)} \left[(b + c)^2 - a^2\right] < \frac{b - c}{2(b + c)} \cdot a, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{(b + c)^2 - a^2}{a} < a, \quad \text{másképpen} \quad (b + c)^2 < 2a^2.$$

Elegendő tehát a legutóbb kapott egyenlőtlenséget igazolni. A koszinusztétel szerint $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, amiből $a^2 > b^2 + c^2$, hiszen $\cos\alpha < 0$. Mivel $(b - c)^2 > 0$, így $b^2 + c^2 > 2bc$; tehát az előbbi egyenlőtlenségből:

$$2a^2 > 2b^2 + 2c^2 > b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2.$$

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy a $DE \geq EF$ esetben a háromszög csak hegyesszögű lehet. Ekkor ugyanis $2a^2 \leq (b+c)^2$ teljesül, amit a koszinusztétel felhasználásával átalakítva:

$$2(b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha) \leq b^2 + c^2 + 2bc, \quad \text{innen}$$

$$\cos\alpha \geq \frac{(b-c)^2}{4bc}, \quad \text{tehát a háromszög hegyesszögű.}$$

2. A feladat állítása kiterjeszthető. A II. megoldásból azonnal látszik, hogy $DE < EF$ akkor is teljesül, ha az A csúcsnál derékszög van.