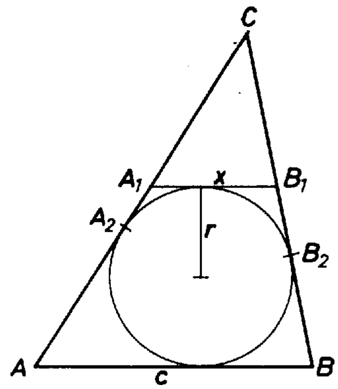
I.megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen az ABC háromszög kerülete $2s$, a c oldallal párhuzamos érintőszakasz pedig $x = A_1B_1$. A beírt kör az AC, illetve a BC oldalt az A_2, illetve a B_2 pontban érinti.



Az ABC és A_1B_1C háromszögek nyilván hasonlóak, a hasonlóság aránya legyen k. Az A_1, B_1 és A, B pontokból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége révén $x = A_1B_1 = A_1A_2 + B_1B_2 = k \cdot c$ és $AA_2 + BB_2 = c$. Ezért az ABC háromszög kerülete:

$$2s = 2c + CA_1 + x + CB_1 = 2c + k \cdot 2s$$

Ebből $s = c + k \cdot s$, amit k-val szorozva: $k \cdot s = k \cdot c + k^2 \cdot s$; $k \cdot c = x$-et kifejezve:

$$x = s \cdot (k - k^2).$$

A $k \mapsto k - k^2$ függvény legnagyobb értéke a $k = \frac{1}{2}$ helyen van, és a maximuma $\frac{1}{4}$. Ezért x legnagyobb értéke $\frac{s}{4}$ lehet, ami valóban a kerület nyolcadrésze. Ez meg is valósul, ha $k \cdot c = \frac{s}{4}$, azaz $c = \frac{s}{2}$.

II. megoldás. Jelöljük a beírt kör sugarát r-rel, a c oldalhoz tartozó magasságot pedig m-mel. Az első megoldásban említett hasonlóság alapján $\frac{x}{c} = \frac{m - 2r}{m} = 1 - \frac{2r}{m}$.

A háromszög területe kifejezhető a beírt kör sugarával: $\frac{c \cdot m}{2} = r \cdot s$, amiből $\frac{2r}{m} = \frac{c}{s}$. Az így kapott két összefüggésből $\frac{x}{c} = 1 - \frac{c}{s}$, vagyis $x \cdot s = c(s - c)$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint $c(s-c) \leq \left(\frac{c + s - c}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4}$, ezért $x \cdot s \leq \frac{s^2}{4}$, és így $x \leq \frac{s}{4}$, amint azt állítottuk. Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha $c = s - c$, azaz $c = \frac{s}{2}$ esetén. Szavakban: akkor, ha a háromszög egyik oldala éppen a kerület negyedrésze, egyben az ehhez tartozó magasság $4r$. Ilyen oldal legfeljebb egy lehet.

Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)